

# BAC

سلسلة هباج

مطابق للبرنامج الجديد

# الرياضيات

دروس و تمارين محلولة بالتفصيل

- ➔ حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
- ➔ حلول مفصلة لتمرين نموذجية
- ➔ حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية \* رياضيات \* تقني رياضي

## kimou.

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

3<sup>e</sup> Année Secondaire : Mathématiques

الجزء

2



# سلسلة هباج

## الرياضيات

## Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي  
و نماذج للبكالوريا

الجزء الثاني

السنة 3 ثانوي

تقني رياضي - رياضيات - علوم تجريبية

## الإشتقاقية

العدد المشتق و الدالة المشتقة :

تعريف :  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  جزئي من  $\mathbb{R}$ . يشمل العددين  $a$  و  $a+h$  حيث  $h \in \mathbb{R}$

نقول أن  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $a$  إذا و فقط إذا كانت النسبة  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  عندما يؤول  $h$  إلى 0 نهاية محدودة .

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $a$  و نرمز لها بـ  $f'(a)$

ملاحظة (1) يمكن كتابة النسبة  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  من الشكل  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  بوضع  $x = a+h$  فإن  $h = x - a$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{إذن :}$$

ملاحظة (2) : إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $I$  نقول أنها تقبل الاشتقاق على  $I$  و دالتها

المشتقة الأولى .  $f'$  معرفة بـ :  $f' : x \mapsto f'(x)$

مثال :  $f(x) = x^2 + 1$

ليكن  $a$  عدد حقيقي كفي . هل  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $a$  ؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + 1) - (a^2 + 1)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 1 - a^2 - 1}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x + a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} a + a \\ &= 2a \end{aligned}$$

بما أن  $2a \in \mathbb{R}$  فإن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $a$  و  $f'(a) = 2a$

نتيجة : الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة  $f' : a \mapsto 2a$  و خاصة  $f' : x \mapsto 2x$

إذن :  $f'(x) = 2x$

التفسير الهندسي للعدد المشتق

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$ .  $(C)$  منحناها في مستوى منسوب إلى معلم  $(O; \vec{I}; \vec{J})$

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  حيث  $x_0 \in I$  فإن المنحنى  $(C)$  يقبل عند النقطة  $A(x_0; f(x_0))$  مماسا  $(T)$  معامل

توجيهه  $f'(x_0)$  و معادلته  $y = f'(x_0)[x - x_0] + f(x_0)$

المشتقات من الدرجة  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

$f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $f'$  دالتها المشتقة الأولى . إذا قبلت الدالة  $f'$  بدورها الاشتقاق على المجال  $I$  فإن

دالتها المشتقة الأولى تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة  $f$  و نرمز لها بـ  $f''$

إذن بهذه الطريقة يمكن تعريف دوال مشتقة من الدرجة 3 ؛ 4 ؛ 5 .... و نرمز لها بـ  $f'''$  ؛  $f^{(4)}$  و عامة  $f^{(n)}$

مثال :  $f(x) = x^4$  إذن :  $f'(x) = 4x^3$

و  $f''(x) = 12x^2$

و  $f'''(x) = 24x$

و  $f^{(4)}(x) = 24$

## نشاط (1)

$f$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة  $f'$  معرفة بـ  $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

نعرف الدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$  بـ  $h(x) = f(2x - 1)$

احسب  $h'(x)$  دون تعيين  $h(x)$

الحل :

لنعرف الدالة  $u$  كمايلي :  $u : x \mapsto 2x - 1$  منه  $u' : x \mapsto 2$

$$h(x) = f(2x - 1) = f(u(x)) = f \circ u(x)$$

إذن :

$$h'(x) = u'(x) \times (f'(u(x)))$$

منه :

$$= 2 \times f'(2x - 1)$$

$$= 2 \times \frac{1}{(2x - 1)^2 + (2x - 1) + 1}$$

$$= \frac{2}{4x^2 - 4x + 1 + 2x - 1 + 1}$$

$$= \frac{2}{4x^2 - 2x + 1}$$

إتجاه تغير دالة

$f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$

إذا كان  $f'(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من المجال  $I$  فإن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $I$

إذا كان  $f'(x) < 0$  من أجل كل  $x$  من المجال  $I$  فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $I$

إذا كان  $f'(x) = 0$  من أجل كل  $x$  من المجال  $I$  فإن الدالة  $f$  ثابتة على  $I$

القيم الحدية المحلية لدالة على مجال

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد  $x_0$

إذا كان من أجل كل  $x$  من المجال  $I$  :  $f(x) \leq f(x_0)$  نقول أن  $f(x_0)$  قيمة حدية عظمى محلية على المجال  $I$  للدالة  $f$

إذا كان من أجل كل  $x$  من المجال  $I$  :  $f(x) \geq f(x_0)$  نقول أن  $f(x_0)$  قيمة حدية صغرى محلية على المجال  $I$  للدالة  $f$

مبرهنة :

$f$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $I$  يشمل العدد  $x_0$

إذا كان  $f'(x_0) = 0$  و  $f'$  تغير إشارتها حول  $x_0$  فإن  $f(x_0)$  هي قيمة حدية محلية للدالة  $f$  على المجال  $I$

تفسير :

$f'(x_0) = 0$  و  $f'$  تغير إشارتها إذن لدينا الحالتين التاليتين :

$x \in I$	$x_0$
$f'(x)$	- 0 +

أو

$x \in I$	$x_0$
$f'(x)$	+ 0 -

$f'$  تغير إشارتها من - إلى +

$f'$  تغير إشارتها من + إلى -

إذن : جدول التغيرات يكون كالتالي :

$x \in I$	$x_0$
$f(x)$	$f(x_0)$
	قيمة حدية صغرى

أو

$x \in I$	$x_0$
$f(x)$	$f(x_0)$
	قيمة حدية عظمى

مشتقات بعض الدوال المركبة

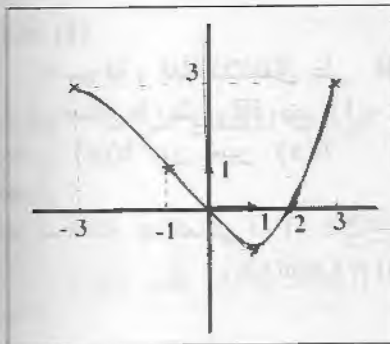
$u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$

مشتقة الدالة  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$  هي  $x \mapsto u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$  حيث  $u(x) > 0$

مشتقة الدالة  $x \mapsto [u(x)]^n$  هي  $x \mapsto n \times u'(x) \times [u(x)]^{n-1}$  عند طبيعي أكبر من 1

مشتقة الدالة  $x \mapsto \sin(u(x))$  هي  $x \mapsto u'(x) \times \cos(u(x))$

مشتقة الدالة  $x \mapsto \cos(u(x))$  هي  $x \mapsto -u'(x) \times \sin(u(x))$



إليك التمثيل البياني لدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[-1; 3]$

1 - أرسم جدول تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[-1; 3]$  ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $[-1; 3]$

2 - لنعتبر دالة عددية  $f$  على المجال  $[-1; 3]$  معرفة بـ  $f(x) = [g(x)]^2$   
أحسب  $f'(x)$  بدلالة  $g(x)$  و  $g'(x)$  ثم استنتج إشارة  $f'(x)$

الحل :

1 - جدول تغيرات الدالة  $g$  على  $[-1; 3]$

من منحنى الدالة  $g$  نلاحظ أن :  $g$  متناقصة على المجال  $[-1; 1]$  و متزايدة

على المجال  $[1; 3]$  و  $g(-1) = 1$  ؛  $g(1) = -1$  ؛  $g(3) = 3$  ؛  $g(0) = 0$  و  $g(2) = 0$   
منه : جدول التغيرات التالي :

x	-1	0	1	2	3
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	1		-1		3

x	-1	1	3
$g'(x)$	-	0	+

نتيجة : جدول إشارة  $g'(x)$  :

x	-1	0	2	3
$g(x)$	+	0	-	+

جدول إشارة  $g(x)$  :

2 - لدينا :  $f(x) = [g(x)]^2$

إذن :  $f'(x) = 2 \times g'(x) \times g(x)$

إذن : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $g'(x) \times g(x)$  كمايلي :

x	-1	0	1	2	3
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	+	0	-	0	+
$g'(x) \times g(x)$	-	0	+	0	+

خلاصة : جدول إشارة  $f'(x)$  على المجال  $[-1; 3]$  :

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-	0	+	0	+

التقريب التآلفي لدالة :

$f$  دالة معرفة على مجال مفتوح  $I$  يشمل العدد  $x$

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x$  فإن يوجد دالة عددية  $\varepsilon$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $h$  يحقق أن  $(x+h) \in I$  لدينا :

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + h \varepsilon(h) \quad \text{مع} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{أي من أجل} \quad h \text{ قريب من الصفر فإن} :$$

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) \quad \text{لأن} \quad h \times \varepsilon(h) = 0$$

في هذه الحالة العدد  $f(x) + h f'(x)$  يسمى التقريب التآلفي لـ  $f(x+h)$  من أجل  $h$  يقترب من 0 مرفق بالدالة  $f$

ملاحظة : إذا وضعنا  $\Delta x = (x+h) - x$  و  $\Delta y = f(x+h) - f(x)$  فإن المساواة  $f(x+h) = f(x) + h f'(x) + h \varepsilon(h)$

$$\text{تصبح} \quad f(x+h) - f(x) = h f'(x) + h \varepsilon(h)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta y &= f(x+h) - f(x) \\ \Delta x &= (x+h) - x = h \end{aligned} \right\} \quad \text{أي :} \quad \Delta y = f'(x) \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x \quad \text{لأن} \quad \Delta y = f'(x) \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$$

إذن :  $\Delta y = f'(x) \Delta x$  لما  $\Delta x$  يقترب من 0

نضع إصطلاحا الصياغة التفاضلية التالية :  $dy = f'(x) dx$  أي  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

أذن تصفة عامة الرمز  $\frac{df}{dx}$  يستعمل بدلا من  $f'(x)$  مثلا :  $\frac{d^2f}{dx^2}$  بدلا من  $f''(x)$  و  $\frac{d^n f}{dx^n}$  بدلا من  $f^{(n)}(x)$

طريقة أولر لتقريب دالة

الهدف من طريقة أولر هو البحث عن صور أعداد حقيقية متتالية حيث يكون الفرق بينها عدد حقيقي  $h$  يؤول إلى 0 و ذلك بتطبيق التقريب التآلفي لدالة  $f$  كمايلي :

لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتول  $I$  يشمل العدد  $x_0$  و  $h$  عدد حقيقي يؤول إلى 0

نضع :  $x_0 = x_{n-1} + h$  ..... :  $x_3 = x_2 + h$  :  $x_2 = x_1 + h$  :  $x_1 = x_0 + h$

حيث كل الأعداد  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  تنتمي إلى المجال  $I$

أذن : بتطبيق التقريب التآلفي للدالة  $f$  على المجال  $I$  نحصل على :

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0)$$

$$f(x_2) = f(x_1 + h) = f(x_1) + h f'(x_1)$$

$$f(x_3) = f(x_2 + h) = f(x_2) + h f'(x_2)$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) = f(x_{n-1} + h) = f(x_{n-1}) + h f'(x_{n-1})$$

بهذه الطريقة يمكن تعيين النقط  $A_0(x_0; f(x_0))$  :  $A_1(x_1; f(x_1))$  :  $A_2(x_2; f(x_2))$  : ..... :  $A_n(x_n; f(x_n))$  و عند

الربط بين هذه النقط نحصل على تمثيل بياني تقريبي لمنحنى الدالة  $f$  على المجال  $I$  كلما اقترب  $h$  من 0

ملاحظة : العدد  $h$  يسمى الخطوة

نشاط :

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(x) = \sqrt{x} \end{array} \right\} \text{ دالة تحقق } f$$

باستعمال طريقة أولر من أجل الخطوة  $h = 0,5$  أحسب  $f(1,5)$  :  $f(1)$  :  $f(0,5)$

الحل :

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) \quad \text{التقريب التآلفي للدالة } f \text{ هو من الشكل :}$$

$$f(x+0,5) = f(x) + h f'(x) \quad \text{و من أجل } h = 0,5 \text{ نحصل على :}$$

$$f'(x) = \sqrt{x} \quad \text{بما أن } f'(x) \text{ نعتبر المجال } [0; 2]$$

$$f(0+0,5) = f(0) + 0,5 \sqrt{0} \quad \text{من أجل } x = 0 \text{ نحصل على :}$$

$$f(0,5) = 1 + 0 = 1 \quad \text{أي :}$$

$$f(0,5+0,5) = f(0,5) + 0,5 \sqrt{0,5} \quad \text{من أجل } x = 0,5 \text{ نحصل على :}$$

$$f(1) = 1 + 0,5 \sqrt{0,5} \approx 1,35 \quad \text{أي :}$$

$$f(1+0,5) = f(1) + 0,5 \sqrt{1} \quad \text{من أجل } x = 1 \text{ نحصل :}$$

$$f(1,5) = 1,35 + 0,5 = 1,85 \quad \text{أي :}$$

أذن النقط  $(0; 1)$  :  $(0,5; 1)$  :  $(1; 1,35)$  :  $(1,5; 1,85)$  هي نقط تقريبية من منحنى الدالة  $f$

الدالة  $\sin$

الدالة  $x \mapsto \sin x$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة  $x \mapsto \cos x$  و من خواصها الأساسية مايلي :

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \text{و } (x+2\pi) \in \mathbb{R} \quad \text{فإن } \mathbb{R} \text{ من } x \text{ كل}$$

أذن : الدالة  $\sin$  دورية و دورها  $2\pi$  إذن يكفي دراستها على المجال  $[-\pi; \pi]$

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{و } (-x) \in \mathbb{R} \quad \text{فإن } \mathbb{R} \text{ من } x \text{ كل}$$

أذن الدالة  $\sin$  فردية أي منحنائها يقل مبدأ المعلم كمرکز تناظر

جدول التغيرات على المجال  $[-\pi; \pi]$

$x$	$-\pi$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$\pi$
$\cos x$	-	0	+	0
$\sin x$	0	-1	1	0

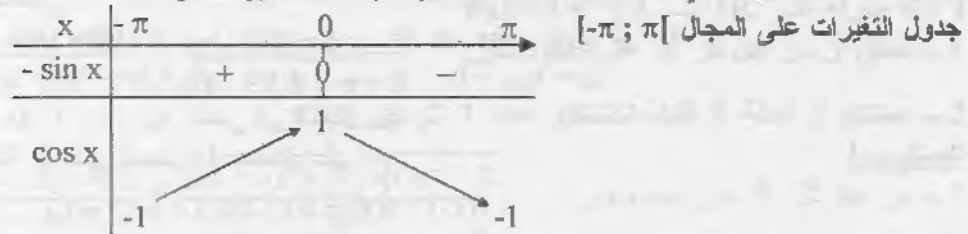


الدالة  $\cos$ 

الدالة  $x \mapsto \cos x$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة  $x \mapsto -\sin x$  ومن خواصها الأساسية :

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  و  $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$  إذن الدالة  $\cos$  دورية و دورها  $2\pi$  إذن يكفي دراستها على المجال  $[-\pi; \pi]$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $\cos(-x) = \cos x$  و  $(-x) \in \mathbb{R}$  إذن الدالة  $\cos$  زوجية أي منحناها يقبل حامل محور الترتيب كمحور تناظر

الدالة  $\tan$ 

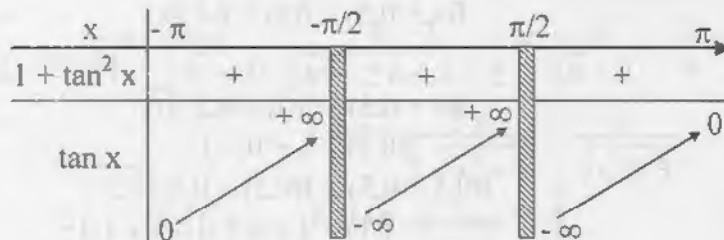
الدالة  $x \mapsto \tan x$  معرفة من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $\frac{\pi}{2} + \pi k$  حيث  $k$  عدد صحيح لأن  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  إذن معرفة من أجل  $\cos x \neq 0$  ومن خواصها الأساسية :

من أجل كل  $x$  يختلف عن  $\frac{\pi}{2} + \pi k$  فإن  $\tan(x + \pi) = \tan x$  إذن الدالة  $\tan$  دورية و دورها  $\pi$  إذن يكفي دراستها على المجال  $[-\pi; 0]$

من أجل كل  $x$  يختلف عن  $\frac{\pi}{2} + \pi k$  فإن  $\tan(-x) = -\tan x$  إذن الدالة  $\tan$  فردية منه منحناها يقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر

من أجل كل  $x$  يختلف عن  $\frac{\pi}{2} + \pi k$  فإن الدالة  $\tan$  قابلة للاشتقاق عند  $x$  و دالتها المشتقة  $x \mapsto 1 + \tan^2 x$  إذن موجبة تماما .

جدول التغيرات على المجال  $[-\pi; \pi]$



$$\tan(-\pi) = \frac{\sin(-\pi)}{\cos(-\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\tan(\pi) = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-\pi/2)}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-\pi/2)}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\pi/2)}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi/2)}{y} = -\infty$$

نشاط :

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \sin^2 x$  و  $(C)$  منحناها في معلم متعامد  $(0; \pi; j)$

1 - بين أن الدالة  $f$  دورية و دورها  $\pi$

2 - بين أن حامل محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى  $(C)$

3 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0 ; \pi/2]$

4 - أرسم المنحنى (C) على  $[0 ; \pi/2]$  ثم على المجال  $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$

الحل :

1 - من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $(x + \pi) \in \mathbb{R}$  و  $\sin^2(x + \pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$

إذن :  $f(x + \pi) = f(x)$  منه  $f$  دورية و دورها  $\pi$

2 - من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $(-x) \in \mathbb{R}$  و  $\sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$

إذن :  $f(-x) = f(x)$  منه  $f$  دالة زوجية إذن : محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى (C)

3 - معرفة و قابلية للاشتقاق على  $[0 ; \pi/2]$  و دالتها المشتقة  $f'(x) = 2 \cos x \sin x$

إذن :  $f'(x) > 0$  من أجل  $x \in ]0 ; \pi/2[$  لأن  $\cos x > 0$  و  $\sin x > 0$

منه جدول التغيرات :

$x$	0		$\pi/2$
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	0		1

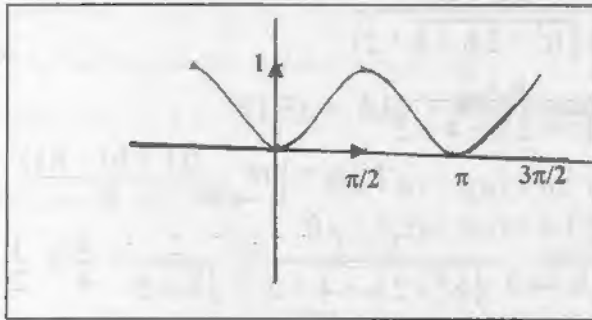
4 - طريقة الرسم :

✓ ترسم جزء المنحنى (C) على المجال  $[0 ; \pi/2]$

✓ بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب (دالة زوجية) نرسم المنحنى على  $[-\pi/2 ; 0]$

✓ بإجراء سحب المنحنى على المجال  $[-\pi/2 ; \pi/2]$  بخطوة قدرها  $\pi$  (الدالة دورية و دورها  $\pi$ ) نحصل على المنحنى

(C) على المجال  $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$





## تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 1 -

 $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$  على  $\mathbb{R}$  دالة معرفة على

$$1 - \text{تحقق أن من أجل كل } h \text{ غير معدوم يكون : } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h+2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2}$$

2 - استنتج أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 1 ثم عيّن  $f'(1)$ 

الحل 1 -

$$1 - \text{من أجل كل } h \text{ غير معدوم فإن : } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{(1+h)^2 + 3} - \sqrt{1^2 + 3}}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 + 2h + 4} - 2}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 + 2h + 4} - 2}{h} \times \frac{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2}$$

$$= \frac{h^2 + 2h + 4 - 4}{h(\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2)}$$

$$= \frac{h(h+2)}{h(\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2)}$$

$$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2}$$

$$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2}$$

$$2 - \text{نعلم أن : } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2} = \frac{2}{\sqrt{4} + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

إذن :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

تحقيق :

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$$

إذن :

التمرين 2 -

 $f(x) = |x|$  على  $\mathbb{R}$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  . أثبت أن  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند 0

الحل 2 -

$$\text{ليكن } h \in \mathbb{R} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

نميز حالتين كمايلي :

$$\lim_{h \rightarrow 0} |h| = h \quad \text{لأن} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{الأولى :}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |h| = -h \quad \text{لأن} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1 \quad \text{الثانية :}$$

نتيجة : النسبة  $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$  لا تقبل نهاية لما يؤول  $h$  إلى 0إذن : الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند 0

### التمرين - 3

$f$  دالة قابلة للاشتقاق عند  $(-1)$  حيث  $f'(-1) = 2$

علما أن المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم يمر بالنقطة  $A(-1; -3)$  ، أكتب معادلة لمماس هذا المنحنى عند النقطة  $A$

### الحل - 3

النقطة  $A(-1; -3)$  تنتمي إلى منحنى الدالة  $f$  إذن :  $f(-1) = -3$

نعلم أن معادلة مماس المنحنى عند نقطة ذات الفاصلة  $(-1)$  تكتب من الشكل :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$y = 2(x + 1) + (-3)$$

أي :

$$y = 2x - 1$$

أي :

و هي معادلة المماس المطلوبة .

### التمرين - 4

(C) منحنى بياني لدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و قابلة للاشتقاق عند  $0$

المستقيم (T) ذو المعادلة  $y = 2 - 3x$  هو مماس للمنحنى (C) عند النقطة  $A(0; 2)$

1 - حدد  $f(0)$  ؛  $f'(0)$

2 - فسر هندسيا النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$  ثم برر وجودها و عين قيمتها

### الحل - 4

1 - النقطة  $A(0; 2)$  تنتمي إلى المنحنى (C) إذن :  $f(0) = 2$

مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة  $0$  له المعادلة  $y = 2 - 3x$  أي ميله هو  $-3$  منه  $f'(0) = -3$

2 - النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$  تمثل ميل مماس المنحنى الدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $0$  لأنها تكتب من الشكل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad (\text{حيث } f(0) = 2)$$

إذن : هذه النهاية موجودة لأن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $0$  و قيمتها  $f'(0) = -3$

### التمرين - 5

إليك التمثيل البياني لدالة  $f$  و المستقيمت (T<sub>1</sub>) و (T<sub>2</sub>) مماسات له

1 - حدد القيم التالية :  $f(0)$  ؛  $f'(0)$  ؛  $f(1)$  ؛  $f'(1)$

2 - أكتب معادلة لكل من المستقيمين (T<sub>1</sub>) و (T<sub>2</sub>)

### الحل - 5

1 - من منحنى الدالة  $f$  نلاحظ أن النقط  $A(0; 2)$  و  $B(1; 2)$

تنتمي إلى المنحنى (C) للدالة  $f$  إذن :  $f(0) = 2$  و  $f(1) = 2$

نلاحظ أيضا أن مماس المنحنى عند النقطة  $B(1; 2)$  يوازي محور

الافاصل إذن ميله معدوم أي  $f'(1) = 0$

نلاحظ أيضا أن مماس المنحنى عند النقطة  $A(0; 2)$  مائل بزاوية  $\theta$

$$\tan \theta = \frac{-1}{2} = -2 \quad \text{حيث}$$

منه ميل المماس هو  $f'(0) = -2$

نتيجة :  $f'(0) = -2$  و  $f'(1) = 0$

2 - (T<sub>1</sub>) مماس لمنحنى الدالة  $f$  عند  $A(0; 2)$  إذن معادلته :

$$y = -2x + 2 \quad \text{أي } y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

(T<sub>2</sub>) مماس لمنحنى الدالة  $f$  عند  $B(1; 2)$  إذن معادلته  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$  أي  $y = 2$  لأن  $f'(1) = 0$

### التمرين - 6

(C) تمثيل بياني لدالة  $f$  يشمل النقطة  $A(-2; 3)$

(T) مماس للمنحنى (C) عند النقطة A يوازي المستقيم ذو المعادلة  $3x - 2y + 1 = 0$

أكتب معادلة المستقيم (T)

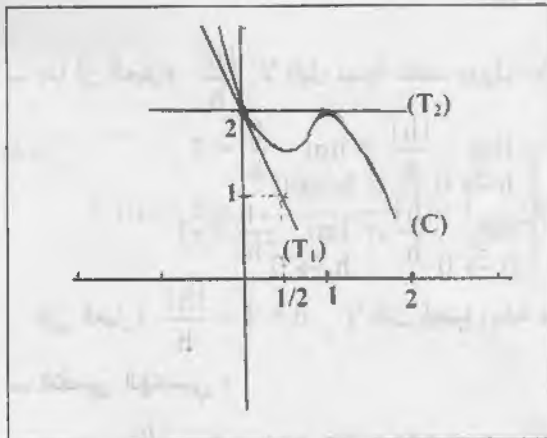
### الحل - 6

المماس (T) يوازي المستقيم ذو المعادلة  $3x - 2y + 1 = 0$  إذن لهما نفس معامل التوجيه الذي يساوي  $3/2 - a/b$  من

أجل معادلة مستقيم من الشكل  $ax + by + c = 0$  حيث  $b \neq 0$

إذن :  $f'(-2) = 3/2$

من جهة أخرى النقطة  $A(-2; 3)$  تنتمي إلى المنحنى (C) إذن :  $f(-2) = 3$



منه معادلة المماس (T) هي :  $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

أي :  $y = \frac{3}{2}(x+2) + 3$

أي :  $y = \frac{3}{2}x + 6$

تحقيق : هل  $A(-2; 3)$  تنتمي إلى (T) ؟

$$\frac{3}{2}(-2) + 6 = -3 + 6 = 3 \text{ محقق .}$$

التمرين - 7

(C) منحنى الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x^2 + |x - 1|$

1 - أثبت أن من أجل  $h \neq 0$  فإن  $\frac{f(1+h)-1}{h} = h + 2 + \frac{|h|}{h}$

2 - هل العبارة  $\frac{f(1+h)-1}{h}$  تقبل نهاية عندما يؤول  $h$  إلى 0 ؟

3 - أعط تفسيراً هندسياً للجواب عن السؤال (2) ثم أكتب معادلتى نصفي المماسين للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1

الحل - 7

$$\frac{f(1+h)-1}{h} = \frac{(1+h)^2 + |1+h-1| - 1}{h} \quad 1 - \text{من أجل } h \neq 0 \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{h^2 + 2h + 1 + |h| - 1}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 2h + |h|}{h}$$

$$= \frac{h^2}{h} + \frac{2h}{h} + \frac{|h|}{h}$$

$$= h + 2 + \frac{|h|}{h}$$

2 - بما أن العبارة  $\frac{|h|}{h}$  لا تقبل نهاية عندما يؤول  $h$  إلى 0 لأن :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{array} \right. \text{ النهايتين مختلفتين}$$

إذن العبارة  $h + 2 + \frac{|h|}{h}$  لا تقبل أيضاً نهاية لما يؤول  $h$  إلى 0

3 - التفسير الهندسي :

العبارة  $h + 2 + \frac{|h|}{h}$  لا تقبل نهاية لما  $h$  يؤول إلى 0 هذا يعني أن العبارة  $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$  لا تقبل نهاية لما  $h$

يؤول إلى 0

أي الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند 1

و لكن :  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h + 2 + \frac{|h|}{h} = 3$  لأن  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$

و  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h + 2 + \frac{|h|}{h} = 1$  لأن  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$

أي الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على يمين 1 و عددها المشتق هو 3

و تقبل الاشتقاق على يسار 1 و عددها المشتق هو 1

إذن المنحنى (C) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1 أحدهما على اليمين و ميله 3 و الآخر على

اليسار و ميله 1 معادلاتهما على الترتيب :

على اليمين :  $y = 3(x-1) + f(1)$  أي  $y = 3(x-1) + 1$  أي  $2-y = 3x$



على اليسار :  $y = 1(x - 1) + f(1)$  أي  $y = x - 1 + 1$  أي  $y = x$

التمرين - 8

$f$  دالة معرفة على  $[-2; +\infty[$  بـ  $f(x) = \sqrt{x+2}$

1 - أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$

2 - هل الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على يمين  $(-2)$  ؟ فسر هندسيا

الحل - 8

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2+h+2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

2 - بما أن :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = +\infty$  (حسب السؤال الأول) لأن  $f(-2) = 0$

فإن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق على يمين  $-2$ .

هندسيا : منحنى الدالة  $f$  يقبل نصف مماس على يمين  $-2$  يوازي حامل محور الترتيب

التمرين - 9

1 مجال جزئي من  $\mathbb{R}$  يشمل العدد  $\alpha$ .  $f$  دالة معرفة على  $I$  وقابلة للاشتقاق عند  $\alpha$  حيث  $f'(\alpha) = \ell$  مع  $\ell \in \mathbb{R}$

نعتبر الدالة  $g$  معرفة على المجال  $I$  بـ  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} & : x \neq \alpha \\ \ell & : x = \alpha \end{cases}$

1 - أثبت أن  $g$  مستمرة عند  $\alpha$

2 - من أجل  $x \in I - \{\alpha\}$  أكتب  $f(x)$  بدلالة  $x$  و  $g(x)$

3 - أحسب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$  إذا تستنتج ؟

الحل - 9

1 - الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $\alpha$  و  $f'(\alpha) = \ell$  إذن حسب التعريف فإن :  $f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \ell$

لكن  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \ell$  إذن :  $g(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

نتيجة :  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \ell = g(\alpha)$  إذن : الدالة  $g$  مستمرة عند  $\alpha$

2 - من أجل  $x \in I - \{\alpha\}$  لدينا :  $g(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

أي :  $(x - \alpha) g(x) = f(x) - f(\alpha)$

أي :  $f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha) g(x)$

3 - حسب السؤال (2) فإن :  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(\alpha) + (x - \alpha) g(x)$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \ell$  لأن  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(\alpha) + (x - \alpha) \ell$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} (x - \alpha) \ell = 0$  لأن  $f(\alpha)$

نتيجة :  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$  إذن :  $f$  دالة مستمرة عند  $\alpha$

التمرين - 10

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 3x + |x^2 - 4|$

1 - تحقق أن  $f$  مستمرة عند  $-2$

2 - برهن أن من أجل  $h \in ]-1/2; 0[ \cup ]0; 1/2[$  فإن  $\frac{f(-2+h) - 6}{h} = 3 + \frac{|h|}{h}(4-h)$

3 - هل الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $-2$  ؟الحل - 10

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} 3x + |x^2 - 4| - 6 \quad -1$$

$$f(-2) = 3(-2) + |(-2)^2 - 4| - 6 = -6$$

نتيجة :  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$  إذن  $f$  مستمرة عند  $-2$ 2 - ليكن  $h \in ]-1/2; 0[ \cup ]0; 1/2[$ 

$$\begin{aligned} \frac{f(-2+h) + 6}{h} &= \frac{3(-2+h) + |(-2+h)^2 - 4| + 6}{h} \\ &= \frac{-6 + 3h + |4 - 4h + h^2 - 4| + 6}{h} \\ &= \frac{3h + |h^2 - 4h|}{h} \\ &= \frac{3h + |h| \times |h - 4|}{h} \\ &= 3 + \frac{|h|}{h} \times |h - 4| \end{aligned}$$

بما أن  $h \in ]-1/2; 0[ \cup ]0; 1/2[$  فإن  $h - 4 < 0$  أي :  $|h - 4| = 4 - h$ منه :  $\frac{f(-2+h) + 6}{h} = 3 + \frac{|h|}{h} (4 - h)$  و هو المطلوب

$$\begin{aligned} 3 - لدينا : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 6}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3 + \frac{|h|}{h} (4 - h) \quad \text{حسب السؤال (2)} \end{aligned}$$

إذن : نميز حالتين :

$$\text{الأولى : } \lim_{h \rightarrow 0^-} 3 + \frac{|h|}{h} (4 - h) = 3 - 1(4 - 0) = -1 \quad \text{لأن } |h| = -h$$

$$\text{الثانية : } \lim_{h \rightarrow 0^+} 3 + \frac{|h|}{h} (4 - h) = 3 + 1(4 - 0) = 7 \quad \text{لأن } |h| = h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \quad \text{نتيجة :}$$

إذن : الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند  $-2$ التمرين - 11

في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة التعريف للدالة ثم أحسب مشتقتها

$$h(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \sqrt{x} \quad -3 \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \quad -1$$

$$l(x) = \sqrt{x^2+4} \quad -4 \quad g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \quad -2$$

الحل - 111 -  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \quad 2x$$

2 - g معرفة و قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1 \times \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$\frac{2x - (x+1)}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{x-1}{x}$$

$$\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

3 - h معرفة و قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$h'(x) = \left(1 + \frac{0}{x^2}\right) \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)$$

4 - l معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$l'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

### التمرين 12

عين في كل حالة من الحالات التالية مشتقة الدالة f على المجال D

$$D = \mathbb{R} \quad f(x) = x + x \cos x \quad -1$$

$$D = \mathbb{R} \quad f(x) = \cos x \sin x \quad -2$$

$$D = \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad -3$$

$$D = ]0; \pi[ \quad f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad -4$$

$$D = [0; \pi/2[ \quad f(x) = \frac{\cos x}{-x + \sin x} \quad -5$$

$$D = \mathbb{R} \quad f(x) = \cos\left(-3x + \frac{5}{\pi}\right) \quad -6$$

$$D = \mathbb{R} \quad f(x) = 3x \sin\left(-x + \frac{5}{\pi}\right) \quad -7$$

$$D = \mathbb{R} \quad f(x) = (2x+4)^5 \quad -8$$

$$D = ]4; +\infty[ \quad f(x) = \sqrt{x-4} \quad -9$$

$$D = ]-\infty; 2[ \quad f(x) = \sqrt{-2x+4} \quad -10$$

### الحل 12

$$f'(x) = 1 + 1 \times \cos x - x \sin x \quad \text{إذن} \quad f(x) = x + x \cos x \quad -1$$

$$= 1 + \cos x - x \sin x$$

$$f'(x) = -\sin x \times \sin x + \cos x \times \cos x \quad \text{إذن} \quad f(x) = \cos x \sin x \quad -2$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos 2x$$



$$f'(x) = \frac{(\cos x) \times x - 1 \times \sin x}{x^2} \quad \text{إذن : } f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad - 3$$

$$= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{0(\sin x) - \cos x}{\sin^2 x} \quad \text{إذن : } f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad - 4$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x(-1 + \sin x) - (0 + \cos x) \cos x}{(-1 + \sin x)^2} \quad \text{إذن : } f(x) = \frac{\cos x}{-1 + \sin x} \quad - 5$$

$$= \frac{\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(-1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(-1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-1 + \sin x}{(-1 + \sin x)^2}$$

$$f'(x) = -3\left(-\sin\left(-3x + \frac{5}{\pi}\right)\right) \quad \text{إذن : } f(x) = \cos\left(-3x + \frac{5}{\pi}\right) \quad - 6$$

$$= 3 \sin\left(-3x + \frac{5}{\pi}\right)$$

$$f'(x) = 3 \times \sin\left(-x + \frac{5}{\pi}\right) + 3x \times \left(-\cos\left(-x + \frac{5}{\pi}\right)\right) \quad \text{إذن : } f(x) = 3x \sin\left(-x + \frac{5}{\pi}\right) \quad - 7$$

$$= 3 \sin\left(-x + \frac{5}{\pi}\right) - 3x \cos\left(-x + \frac{5}{\pi}\right)$$

$$f'(x) = 2(2x + 4)^4 \times 5 = 10(2x + 4)^4 \quad \text{إذن : } f(x) = (2x + 4)^5 \quad - 8$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} \quad \text{إذن : } f(x) = \sqrt{x-4} \quad - 9$$

$$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{-2x+4}} = \frac{-1}{\sqrt{-2x+4}} \quad \text{إذن : } f(x) = \sqrt{-2x+4} \quad - 10$$

### التمرين 13

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \cos x$

1 - عين  $f'(x)$  ؛  $f''(x)$  ؛  $f^{(3)}(x)$  ؛  $f^{(4)}(x)$  الدوال المشتقة المتتالية للدالة  $f$

2 - استنتج حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  غير المعدوم عبارة  $f^{(n)}(x)$

### الحل 13

$$f'(x) = -\sin x \quad - 1$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f^{(3)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$$

2 - لاحظ أن من أجل  $n = 5$  فإن  $f^{(5)}(x) = f'(x)$  لأن  $f^{(4)}(x) = f(x)$

$$\left. \begin{aligned} f^{(6)}(x) &= f''(x) \\ f^{(7)}(x) &= f^{(3)}(x) \\ f^{(8)}(x) &= f^{(4)}(x) = f(x) \end{aligned} \right\} \quad \text{إذن :}$$

و منه النتيجة التالية :

✓ إذا كان  $n = 4k$  فإن  $f^{(n)}(x) = \cos x$  مع  $k \in \mathbb{N}^*$

✓ إذا كان  $n = 4k + 1$  فإن  $f^{(n)}(x) = -\sin x$  مع  $k \in \mathbb{N}$

✓ إذا كان  $n = 4k + 2$  فإن  $f^{(n)}(x) = -\cos x$  مع  $k \in \mathbb{N}$

✓ إذا كان  $n = 4k + 3$  فإن  $f^{(n)}(x) = \sin x$  مع  $k \in \mathbb{N}$

## التمرين - 14

من أجل كل  $x \in \mathbb{R}^*$  نعرف الدالتين  $f$  و  $g$  كمايلي :  $f(x) = \frac{1}{x}$  و  $g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$   
 نسمي  $f^{(n)}$  و  $g^{(n)}$  المشتقتان ذات الرتبة  $n$  للدالتين  $f$  و  $g$  على الترتيب حيث  $n$  عدد طبيعي غير معدوم .  
 $f^{(n)} = g^{(n)}$  يكون من أجله

## الحل - 14

لاحظ أن من أجل كل  $x \in \mathbb{R}^*$  فإن :  $g(x) = f(x) + x^2$   
 لنعرف الدالة  $h$  على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $h(x) = x^2$   
 إذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  فإن  $g(x) = f(x) + h(x)$   
 منه : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  فإن  $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + h^{(n)}(x)$   
 إذن : يكون  $g^{(n)} = f^{(n)}$  إذا و فقط إذا كان من أجل كل  $x \in \mathbb{R}^*$  :  $h^{(n)}(x) = 0$   
 لذب :  $h^{(3)}(x) = 0$  و  $h''(x) = 2$  و  $h'(x) = 2x$   
 إذن : أصغر عدد طبيعي  $n$  يحقق  $g^{(n)} = f^{(n)}$  هو  $n = 3$

## التمرين - 15

لتكن  $f$  و  $g$  الدالتين معرفتين على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \sin \theta x$  و  $g(x) = \cos \theta x$  حيث  $\theta$  عدد حقيقي غير معدوم

$$1 - \text{بين أن } f''(x) = -\theta^2 f(x)$$

$$2 - \text{بين أن } g''(x) = -\theta^2 g(x)$$

من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  نضع  $h(x) = a f(x) + b g(x)$

$$3 - \text{بين أن } h''(x) = -\theta^2 h(x)$$

## الحل - 15

1 -  $f(x) = \sin \theta x$  إذن :  $f'(x) = \theta \cos \theta x$   
 منه :  $f''(x) = \theta(-\theta \sin \theta x)$   
 أي :  $f''(x) = -\theta^2 \sin \theta x$   
 أي :  $f''(x) = -\theta^2 f(x)$  و هو المطلوب  
 $g(x) = \cos \theta x$  إذن :  $g'(x) = -\theta \sin \theta x$   
 منه :  $g''(x) = -\theta(\theta \cos \theta x)$   
 أي :  $g''(x) = -\theta^2 \cos \theta x$   
 2 -  $h(x) = a f(x) + b g(x)$  إذن :  $h''(x) = a f''(x) + b g''(x)$   
 أي :  $h''(x) = a(-\theta^2 f(x)) + b(-\theta^2 g(x))$   
 أي :  $h''(x) = -\theta^2(a f(x) + b g(x))$   
 أي :  $h''(x) = -\theta^2 \cdot h(x)$  و هو المطلوب

## التمرين - 16

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

1 - تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$   
 2 - استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $(1+x^2) f''(x) + x f'(x) - f(x) = 0$

## الحل - 16

1 - من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :  $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$   
 أي :  $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$   
 أي :  $f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}$   
 أي :  $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$   
 منه :  $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$  و هو المطلوب  
 2 - لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = \sqrt{1+x^2} \times f'(x)$

ليكن  $g(\alpha) = 0$ انن : لما  $x \in ]-\infty; \alpha[$  فان  $g(x) < 0$ لما  $x = \alpha$  فان  $g(x) = 0$ لما  $x \in ]\alpha; +\infty[$  فان  $g(x) > 0$ منه جدول إشارة  $f'(x)$  حيث  $g(x)$ 

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

**التمرين - 19****f** دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 1$ 1 - أدرس تغيرات الدالة **f**2 - هل **f** تقبل قيم حدية محلية ؟3 - هل **f** محدودة على  $\mathbb{R}$  ؟**الحل - 19**1 - التغيرات : **f** معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة : $f'(x) = 6x^2 + 24x = 6x(x + 4)$  و اشارتها :

$x$	$-\infty$	$-4$	$0$	$+\infty$	
$6x(x+4)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$x$	$-\infty$	$-4$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$
$f(x)$	$-\infty$	$65$	$1$	$+\infty$

جدول التغيرات :

$$f(-4) = 2(-64) + 12(16) + 1 = 65$$

2 - من جدول تغيرات الدالة **f** نستنتج أن :**f** تقبل قيمة حدية محلية عظمى عند -4 و قيمتها 65**f** تقبل قيمة حدية محلية صغرى عند 0 و قيمتها 13 - الدالة **f** ليست محدودة على  $\mathbb{R}$  لأن إحدى نهايتها غير منتهية**التمرين - 20****n** عدد طبيعي غير معدوم و **f** دالة عددية معرفة بـ  $f(x) = x^n$ 1 - أدرس حسب قيم **n** تغيرات الدالة **f**2 - ناقش حسب قيم **n** و **a** عدد حلول المعادلة  $x^n = a$  حيث **a** ثابت حقيقي**الحل - 20**1 - **f** وحيد حد من الدرجة **n** إذن معرف وقابل للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و مشتقة  $f'(x) = nx^{n-1}$ إذن :  $f'$  من إشارة  $x^{n-1}$  لأن  $n > 0$ 

نميز الحالتين التاليين :



$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{(2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} \quad -4$$

لاحظ أن  $f'(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $R - \{-1\}$

إذن :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	متزايدة		متزايدة

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} \quad -5$$

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$x \in ]0; +\infty[ \text{ لأن } = \frac{1}{x^2} \left( -1 + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right)$$

إذن : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$  لأن  $\frac{1}{x^2} > 0$

$$\text{لدينا : } -1 + \frac{1}{2}\sqrt{x} \geq 0 \text{ يكافئ } \frac{1}{2}\sqrt{x} \geq 1$$

$$\text{يكافئ } \frac{1}{4}x \geq 1 \text{ لأن الطرفين موجبين}$$

$$\text{يكافئ } x \geq 4$$

منه جدول الإشارة التالي :

x	0	4	$+\infty$
$-1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$	-	0	+
f	متناقصة	f	متزايدة

### التمرين - 18

f دالة معرفة على IR بـ  $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

1 - أحسب  $f'(x)$  ثم  $f''(x)$

2 - استنتج إشارة  $f'(x)$  على IR

3 - أنجز جدول تغيرات الدالة f

### الحل - 18

$$f'(x) = 4 \times \frac{1}{12}x^3 + 3 \times \frac{1}{6}x^2 + 2 \times \frac{1}{2}x + 1 \quad -1$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

$$f''(x) = 3 \times \frac{1}{3}x^2 + 2 \times \frac{1}{2}x + 1$$

$$= x^2 + x + 1$$

$$2 - \text{لندرس تغيرات الدالة } g : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \text{ (} g(x) = f'(x) \text{)}$$

لدينا : g معرفة وقابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = x^2 + x + 1 \text{ وإشارتها :}$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \text{ إذن : لا تتعدم و تأخذ إشارة موجبة .}$$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$		+	
g(x)	$-\infty$	0	$+\infty$

$$\begin{aligned}
 (f^{n+1})' &= [f(x) \times f^n(x)]' \\
 &= f'(x) \times f^n(x) + [f^n(x)]' \times f(x) \\
 &= f'(x) \times f^n(x) + [n f'(x) \times f^{n-1}(x)] \times f(x) \\
 &= f'(x) \times f^n(x) + n f'(x) \times f^n(x) \\
 &= f'(x) \times f^n(x) [1+n] \\
 &= (n+1) f'(x) \times f^n(x)
 \end{aligned}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

خلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر من 1 فإن  $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$  حدار !  $f^n(x) = [f(x)]^n$  إكن  $f^{(n)}$  هي المشتقة ذات الرتبة  $n$  للدالة  $f$

2 - ليكن  $z \in \mathbb{Z} - \{-1; 0; 1\}$

إذا كان  $z \in \mathbb{N}$  فإن الخاصية محققة حسب السؤال الأول

إذا كان  $z \notin \mathbb{N}$  نضع  $z = -n$  حيث  $n \in \mathbb{N}$

من أجل  $f(x) \neq 0$  فإن :

$$\begin{aligned}
 [f^z(x)]' &= [f^{-n}(x)]' \\
 &= \left[ \frac{1}{f^n(x)} \right]' \\
 &= \frac{0 - n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{[f^n(x)]^2} \\
 &= \frac{-n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{f^{2n}(x)} \\
 &= -n f'(x) \times f^{n-1-2n}(x) \\
 &= -n f'(x) \times f^{-n-1}
 \end{aligned}$$

$$z = -n \quad \text{لأن} \quad = z f'(x) \times f^{z-1}$$

إذن : الخاصية تبقى صحيحة من أجل  $z \in \mathbb{Z} - \{-1; 0; 1\}$

### التمرين 23

باستعمال حاسبة بيانية مثلنا المنحنيين اللذين معادلتيهما  $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$  و  $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$  كما يلي :

1 - ماذا تلاحظ بالنسبة للمنحنيين عند النقطة ذات الفاصلة ؟

2 - نعرف على  $\mathbb{R}$  الدالتين  $f$  و  $g$  كمايلي :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

برهن أن الدالتين  $f$  و  $g$  قابلتان للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

3 - أحسب  $f(1)$  ؛  $f'(1)$  ؛  $g(1)$  ؛  $g'(1)$

4 - تحقق من الملاحظة المصروحة في السؤال (1) ثم أكتب معادلة المماس

### الحل 23

1 - نلاحظ أن المنحنيين يتماسان في النقطة ذات الفاصلة 1 (لهما نفس المماس عند هذه النقطة)

2 - بما أن الدالة  $x \mapsto \sqrt{x}$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$

$x^2 - x + 1 > 0$  فإن الدالة  $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

بما أن  $g$  دالة كثير حدود فإنها قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

$$f(1) = \sqrt{1 - 1 + 1} = 1$$

3 -

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$f'(1) = \frac{2 - 1}{2\sqrt{1 - 1 + 1}} = \frac{1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$g(1) = -\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 1$$

الحالة (1) فردية إذن : (n-1) زوجي	الحالة (2) زوجية إذن : (n-1) فردية

2 - لنكسر المعادلة  $x^n = a$  حيث  $a \in \mathbb{R}$  نميز حالتين :

الحالة (1) فردية n :

من أجل كل  $a \in \mathbb{R}$  فإن المعادلة  $x^n = a$  تقبل حلا وحيدا على  $\mathbb{R}$

الحالة (2) زوجية n :

من أجل  $a < 0$  المعادلة  $x^n = a$  لا تقبل أي حل في  $\mathbb{R}$

من أجل  $a = 0$  المعادلة  $x^n = a$  تقبل حلا واحدا وهو 0

من أجل  $a > 0$  المعادلة  $x^n = a$  تقبل حلين مختلفين في  $\mathbb{R}$

### التمرين 21

عين مشتقات الدوال التالية على  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = (x^3 - x + 1)^5 \quad -1$$

$$g(x) = \frac{1}{(x^2 + 3)^8} \quad -2$$

$$h(x) = \cos^3 \theta x \quad \text{حيث } \theta \text{ عدد حقيقي غير معدوم} \quad -3$$

$$k(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}} \quad -4$$

### الحل 21

$$f'(x) = 5(3x^2 - 1)(x^3 - x + 1)^4 \quad -1$$

$$g'(x) = \frac{0 - 8(2x)(x^2 + 3)^7 \times 1}{(x^2 + 3)^{16}} = -\frac{16x(x^2 + 3)^7}{(x^2 + 3)^{16}} \quad -2$$

$$h'(x) = 3 \times (-\theta \sin \theta x) \times \cos^2 \theta x = -3\theta(\sin \theta x)(\cos^2 \theta x) \quad -3$$

$$k'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}} = \frac{-x}{(x^2 + 1)^2 \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}} \quad -4$$

### التمرين 22

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة الأولى

1 - أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 فإن  $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$

2 - برهن أنه يمكن تمديد هذه الخاصية إلى كل عدد صحيح غير معدوم  $\mathbb{Z}$

### الحل 22

1 - لنبرهن صحة هذه الخاصية بالتراجع على n كإيلي :

$$(f^2(x))' = [f(x) \times f(x)]' \quad \text{من أجل } n=2 \text{ لدينا :}$$

$$\text{حسب الخواص} = f'(x) \times f(x) + f(x) \times f'(x)$$

$$= 2 \times f'(x) \times f(x)$$

$$= 2 \times f'(x) \times f^{2-1}(x)$$

إذن : الخاصية محققة من أجل  $n=2$

لنفرض أن  $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$  من أجل  $n > 2$

هل  $(f^{n+1}(x))' = (n+1) f'(x) \times f^n(x)$  ؟



لدينا :

$$\begin{aligned}
(f^{n+1})' &= [f(x) \times f^n(x)]' \\
&= f'(x) \times f^n(x) + [f^n(x)]' \times f(x) \\
&= f'(x) \times f^n(x) + [n f'(x) \times f^{n-1}(x)] \times f(x) \\
&= f'(x) \times f^n(x) + n f'(x) \times f^n(x) \\
&= f'(x) \times f^n(x) [1 + n] \\
&= (n+1) f'(x) \times f^n(x)
\end{aligned}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$ 

خلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر من 1 فإن  $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$  حذار !  $f^n(x) = [f(x)]^n$  لكن  $f^{(n)}$  هي المشتقة ذات الرتبة  $n$  للدالة  $f$

2- ليكن  $z \in \mathbb{Z} - \{-1; 0; 1\}$ إذا كان  $z \in \mathbb{IN}$  فإن الخاصية محققة حسب السؤال الأولإذا كان  $z \notin \mathbb{IN}$  نضع  $z = -n$  حيث  $n \in \mathbb{IN}$ من أجل  $f(x) \neq 0$  فإن :

$$\begin{aligned}
[f^z(x)]' &= [f^{-n}(x)]' \\
&= \left[ \frac{1}{f^n(x)} \right]' \\
&= \frac{0 - n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{[f^n(x)]^2} \\
&= \frac{-n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{f^{2n}(x)} \\
&= -n f'(x) \times f^{n-1-2n}(x) \\
&= -n f'(x) \times f^{-n-1} \\
&= z f'(x) \times f^{z-1} \quad \text{لأن } z = -n
\end{aligned}$$

إذن : الخاصية تبقى صحيحة من أجل  $z \in \mathbb{Z} - \{-1; 0; 1\}$ التمرين 23

باستعمال حاسبة بيانية مثلنا المنحنيين اللذين معادلتيهما  $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$  و  $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$  كما يلي :

1- ماذا تلاحظ بالنسبة للمنحنيين عند النقطة ذات الفاصلة 1 ؟

2- نعرف على  $\mathbb{IR}$  الدالتين  $f$  و  $g$  كما يلي :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x^2 - x + 1} \\
g(x) &= -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

برهن أن الدالتين  $f$  و  $g$  قابلتان للاشتقاق على  $\mathbb{IR}$ 3- أحسب  $f(1)$  ؛  $f'(1)$  ؛  $g(1)$  ؛  $g'(1)$ 

4- تحقق من الملاحظة المصروحة في السؤال (1) ثم اكتب معادلة المماس

الحل - 23

1- نلاحظ أن المنحنيين يتماسان في النقطة ذات الفاصلة 1 (لهما نفس المماس عند هذه النقطة)

2- بما أن الدالة  $x \mapsto \sqrt{x}$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{IR}$  $x^2 - x + 1 > 0$  فإن الدالة  $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{IR}$ بما أن  $g$  دالة كثير حدود فإنها قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{IR}$ 

$$f(1) = \sqrt{1 - 1 + 1} = 1$$

- 3

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$f'(1) = \frac{2 - 1}{2\sqrt{1 - 1 + 1}} = \frac{1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$g(1) = -\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 1$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$g'(1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= g(1) = 1 \\ f'(1) &= g'(1) = 1/2 \end{aligned} \right\} \text{ 4 - بما أن}$$

فإن منحنىي الدالتين  $f$  و  $g$  لهما نفس المماس عند النقطة  $A(1; 1)$  و معادلته :

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{أي} \quad y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$$

**التمرين 24**

برر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل حالة من الحالات التالية :

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad -3 \quad (1+x)^3 \approx 1 + 3x \quad -1$$

$$\sin x \approx x \quad -4 \quad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x \quad -2$$

**الحل - 24**

$$1 - \text{لنتكن } f \text{ دالة معرفة بـ } f(x) = (1+x)^3$$

إذن :  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 3(1+x)^2$$

$$\text{منه : } f'(0) = 3$$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة  $f$  هو :

$$x \mapsto f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$x \mapsto 3x + 1$$

أي :

$$2 - \text{لنتكن } g \text{ دالة معرفة بـ } g(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$g \text{ قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 0 و دالتها المشتقة : } g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$\text{منه : } g'(0) = -1$$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة  $g$  هو :

$$x \mapsto g'(0)(x-0) + g(0)$$

$$x \mapsto -x + 1$$

أي :

$$3 - \text{لنتكن } h \text{ دالة معرفة بـ } h(x) = \sqrt{1+x}$$

$$h \text{ قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 0 و دالتها المشتقة : } h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\text{إذن : } h'(0) = \frac{1}{2}$$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة  $h$  هو :

$$x \mapsto h'(0)(x-0) + h(0)$$

$$x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$$

أي :

$$4 - \text{لنتكن } \ell \text{ دالة معرفة بـ } \ell(x) = \sin x$$

$\ell$  قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 0 و دالتها المشتقة :

$$\ell'(x) = \cos x$$

$$\text{إذن : } \ell'(0) = \cos(0) = 1$$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة  $\ell$  هو :

$$x \mapsto \ell'(0)(x-0) + \ell(0)$$

$$x \mapsto x$$

أي :

**التمرين 25**

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = x^2$$

1 - عين التقريب التآلفي لعبارة  $f(2+h)$  من أجل  $h$  قريب من 0

2 - أحسب بهذا التقريب قيمة مقربة لـ  $(2,029)^2$

**الحل - 25**

$$1 - f \text{ قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 2 و دالتها المشتقة : } f'(x) = 2x$$

$$\text{إذن : } f'(2) = 2(2) = 4$$

منه : التقريب التآلفي المحلي عند 2 للدالة  $f$  هو :

$$x \mapsto 4(x-2) + f(2)$$

$$x \mapsto 4x - 8 + 4$$

أي :

$$x \mapsto 4x - 4$$

أي :

نتيجة :  $f(x) \approx 4x - 4$ 

بقارب

إذن :  $f(2+h) \approx 4(2+h) - 4$  من أجل  $h$  يقترب من 0أي :  $f(2+h) \approx 4h + 4$  من أجل  $h$  يقترب من 0— لاحظ أن :  $(2.029)^2 = f(2 + 0.029)$ نضع  $h = 0.029$  إذن  $h$  يقترب من 0منه  $f(2 + 0.029) \approx 4h + 4$ أي  $f(2 + 0.029) \approx 4(0.029) + 4$ أي  $f(2.029) \approx 4.116$ 

## التمرين — 26

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر (C) منحنى دالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  فاصلة النقطة A وليكن (T) مماس للمنحنى (C) عند النقطة A. B و C نقطتان من (C) فاصلتهما على الترتيب  $x_0 - h$  و  $x_0 + h$  حيث  $h > 0$  و  $h$  يقترب من 0 ،

D نقطة من المستوي حيث (AD) يعامد (CD) (انظر الشكل) .

1 — أعط قيمة مقربة لمساحة الشكل الهندسي BCD باعتباره مثلث قائم في D بدلالة  $f'(x_0)$  و  $h$  .

2 — أحسب قيمة هذه المساحة من أجل  $h = 0.03$  و معامل توجيه المستقيم (T) يساوي 9 .

## الحل — 26

1 — دالة قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  إذن نقبل تقريب تالفي من أجل  $x$  يقترب من  $x_0$  من الشكل :

$$x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

بما أن  $h$  يقترب من 0 فإن  $(x_0 + h)$  و  $(x_0 - h)$  يقتربان من  $x_0$  و عليه فإن

حسب التقريب التالفي للدالة  $f$  في جوار  $x_0$  لدينا :

$$(1) \dots\dots\dots f(x_0 + h) = f'(x_0)(x_0 + h - x_0) + f(x_0) = h f'(x_0) + f(x_0)$$

$$(2) \dots\dots\dots f(x_0 - h) = f'(x_0)(x_0 - h - x_0) + f(x_0) = -h f'(x_0) + f(x_0) \quad \text{و}$$

حسب الشكل فإن مساحة المثلث القائم BCD هي :  $S = \frac{1}{2} BD \times DC$  حيث

[BD] هي القاعدة و [DC] هو الارتفاع

لدينا إحداثيات النقط B :  $(x_0 - h ; f(x_0 - h))$  ; C :  $(x_0 + h ; f(x_0 + h))$  ; كمايلي

$D(x_0 + h ; f(x_0 - h))$  لأن D على نفس الإستقامة مع B

$$DB = (x_0 + h) - (x_0 - h) = 2h \quad \text{منه :}$$

$$(2) \quad \text{و} \quad DC = f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = [h f'(x_0) + f(x_0)] - [-h f'(x_0) + f(x_0)]$$

$$= 2h f'(x_0)$$

$$\text{نتيجة : } S = \frac{1}{2} BD \times DC \quad \text{أي} \quad S = \frac{1}{2} 2h \times 2h f'(x_0) \quad \text{أي} \quad S = 2h^2 f'(x_0)$$

أي :  $S = 2h^2 f'(x_0)$  و هو المطلوب

2 — معامل توجيه (T) هو 9 أي  $f'(x_0) = 9$

$$S = 2(0.03)^2 \times 9 \quad \text{منه :}$$

$$S = 18(0.0009) \quad \text{أي :}$$

$$S = 0.0162 \quad \text{أي :} \quad \text{مقدر بوحدة قياس المساحة .}$$

## التمرين — 27

إليك المنحنى (C) الممثل لدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها

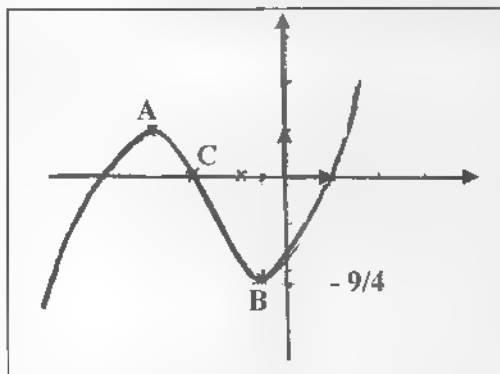
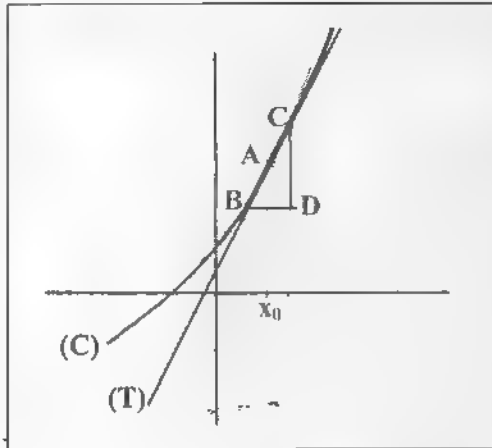
1 — عين العدد المشتق للدالة  $f$  عند كل من  $-1/2$  ;  $-3$  — علما أن

ترتيب النقطة B هو  $-9/4$  .

2 — إستنتج معادلات المماسات للمنحنى (C) عند النقط A ; B

3 — هل توجد مماسات أخرى للمنحنى (C) موازية للمماس عند النقطة (A)

## الحل — 27



1 - حسب منحنى الدالة  $f$  فإن كل من النقط  $A$  و  $B$  هي ذروات محلية للمنحنى (C) .

اذن : تراتبها هي قيم حدية محلية للدالة  $f$  و عليه فالمشتقة تتعدم عند

فواصل هذه النقط أي :  $f'(-1/2) = f'(-3) = 0$

2 - معادلات المماسات عند  $A$  و  $B$  هما على الترتيب  $y - 1$  و  $y - 9/4$  لانهما يوازيان حامل محور الفواصل .

3 - حسب المنحنى لا يوجد اي مماس آخر للمنحنى (C) يوازي المماس عند  $A$  أو  $B$

التمرين - 28

هل الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند 0 :

$$f(x) = x\sqrt{x} \quad -1$$

$$g(x) = x|x| \quad -2$$

$$h(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+x}}\right) \quad -3$$

الحل - 28

1 -  $f$  ليست معرفة على يسار 0 اذن لا تقبل الاشتقاق عند 0

فهل هي قابلة للاشتقاق على يمين 0 ؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

اذن :  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين 0 و عددها المشتق  $f'(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad -2$$

اذن :  $g$  قابلة للاشتقاق عند 0 و  $g'(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+x}}\right)}{x} \quad -3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+x}}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \pi$$

$$= 0$$

اذن :  $h$  قابلة للاشتقاق عند 0 و  $h'(0) = 0$

التمرين - 29

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \begin{cases} 0 : x = 0 \\ x^2 \cos(1/x) : x \neq 0 \end{cases}$

1 - هل  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 (باستعمال التعريف)

2 - احسب  $f'(x)$  من أجل  $x \neq 0$

الحل - 29

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x) - 0}{x} \quad -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \cos(1/x)$$

$$= 0 \quad \text{لأن } -1 \leq \cos(1/x) \leq 1$$

منه :  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 و  $f'(0) = 0$

2 - من أجل  $x \neq 0$  :  $f(x) = x^2 \cos(1/x)$

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left[-\frac{1}{x^2} \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \quad \text{اذن :}$$

$$2x \cos(1/x) + \sin(1/x)$$

## التمرين - 30

(C) منحنى الدالة  $f$  المعرفة بـ  $f(x) = |x^2 - 1|$ 1 - بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين -1 ثم عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 - على اليمين2 - بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على يسار -1 ثم عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 - على اليسار3 - هل الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند -1 ؟4 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  ثم أرسم المنحنى (C)

## الحل - 30

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^2}{x + 1}$$

لأن :

$x$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+
$ x^2 - 1 $	$x^2 - 1$	0	$1 - x^2$	0	$x^2 - 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} 1 - x \\ &= 2 \end{aligned}$$

منه :  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين -1 و عددها المشتق على اليمين هو 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1|}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

منه :  $f$  قابلة للاشتقاق على يسار -1 و عددها المشتق على اليسار هو -23 - بما أن العدد المشتق على يمين -1 يختلف عن العدد المشتق على اليسار فإن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند -1 - معادلات المماسات عند النقطة ذات الفاصلة 1 -على اليمين :  $y = 2(x + 1) + 0$  أي  $y = 2x + 2$ على اليسار :  $y = -2(x + 1) + 0$  أي  $y = -2x - 2$ 4 - التغيرات :  $f$  معرفة على  $R$ 

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & : x \in ]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[ \\ 1 - x^2 & : x \in ]-1 ; 1[ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x \in ]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[ \\ -2x & : x \in ]-1 ; 1[ \end{cases}$$

لاحظ أن  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند كل من -1 و 1

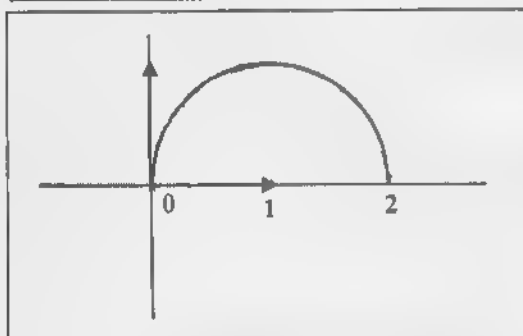
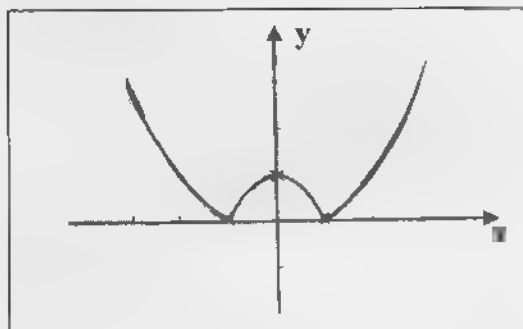


x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
2x					+
-2x			+	0	
f'(x)	-		+	0	-

إشارة المشتقة :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'(x)	-		+	0	-
f(x)	$+\infty$		1		$+\infty$

جدول التغيرات :



المنحنى :

حذار ! النقط ذات الإحداثيات  $(1; 0)$  و  $(-1; 0)$  ليست ذروات للمنحنى لأن الدالة  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند  $-1$  و  $1$

## التمرين 31

$f$  دالة معرفة على المجال  $[0; 2]$  وتمثلها البياني (C) عبارة عن نصف دائرة كما هو مبين في الشكل التالي :

1 - برر أن  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند  $0$ .

2 - برر أن تكون النقطة  $M(x; y)$  تنتمي إلى (C) إذا وفقط إذا كان :

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ و } y \geq 0$$

3 - أكتب عبارة  $f(x)$  من أجل  $x \in [0; 2]$

4 - أوجد بالحساب النتيجة المحصل عليها في السؤال 1.

## الحل 31

1 - من منحنى الدالة  $f$  نلاحظ أن المماس عند النقطة ذات الفاصلة  $0$  يوازي حامل محور الترتيب أي ميله غير منته منه الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند  $0$

2 - لاحظ أن المنحنى (C) جزء من الدائرة ذات المركز  $(1; 0)$  و نصف القطر  $1$

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1$$

إذن معادلتها :

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

أي :

بما أن الجزء واقع فوق محور الفواصل فإن  $y \geq 0$  أي :

معادلة المنحنى (C) هي  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  و  $y \geq 0$  و هو المطلوب .

3 - من السؤال (2) :  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  و  $y \geq 0$  أي :

$$y^2 = 1 - (x-1)^2$$

أي :

$$y^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1)$$

أي :

$$y^2 = 2x - x^2$$

أي :

$$y = \sqrt{2x - x^2} \text{ و } x \in [0; 2]$$

أي :

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \text{ و } x \in [0; 2] \text{ و هي عبارة } f(x)$$

منه :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x - x^2} - 0}{x}$$

- 4

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 \left( \frac{2}{x} - 1 \right)}}{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{\frac{2}{x} - 1}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{x} - 1} \\
&= +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = +\infty
\end{aligned}$$

إن  $f$  غير قابلة للإشتقاق على يمين  $0$  و مماس المنحنى له ميل غير منته أي يوازي محور الترتيب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \quad \text{لأن}$$

### التمرين 32

$f$  دالة معرفة بـ  $f(x) = \sqrt{x} \sin x$

1 - عين  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$

2 - برر أن الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  ثم أحسب  $f'(x)$  على هذا المجال .

3 - بين أن الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على يمين  $0$  ثم أحسب  $f'_d(0)$  حيث  $f'_d(0)$  هو العدد المشتق على يمين  $0$

4 - أكتب عبارة  $f'(0)$  علم المجال  $]0; +\infty[$

### الحل 32

1 -  $f$  معرفة من أجل  $x \geq 0$  إذن :  $D_f = [0; +\infty[$

2 -  $f$  هي جداء الدالتين  $x \mapsto \sqrt{x}$  و  $x \mapsto \sin x$  القابلتين للإشتقاق على  $]0; +\infty[$  إذن :  $f$  قابلة للإشتقاق

على  $]0; +\infty[$  و من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  فإن  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \sin x}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \times \frac{\sin x}{x}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{لأن} \quad 0 = 0$$

نتيجة :  $f$  قابلة للإشتقاق علم يمين  $0$  و  $f'_d(0) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 : x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x : x \in ]0; +\infty[ \end{cases} \quad \text{و هو المطلوب}$$

### التمرين 33

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان .  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

هل يوجد عدنان  $a$  و  $b$  حيث يكون لمماس منحنى الدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $0$  معادلة من الشكل  $y = 4x + 3$  ؟

### الحل 33

$f$  دالة ناطقة معرفة على  $\mathbb{R}$  إذن قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و خاصة عند العدد  $0$  و عليه فإن منحناها يقبل مماس عند النقطة ذات

الفاصلة  $0$  و معادلته  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

أي :  $y = f'(0)x + f(0)$

بالمطابقة مع المعادلة  $y = 4x + 3$  نحصل على الشروط التالية :

$$\begin{cases} f'(0) = 4 & \dots\dots (1) \\ f(0) = 3 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{(6x + a)(x^2 + 1) - 2x(3x^2 + ax + b)}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{لدينا :}$$

منه :  $f'(0) = a/1 = a$

إذن : الشرط (1) يصبح  $a = 4$

من جهة أخرى :  $f(0) = b/1 = b$

إذن : الشرط (2) يصبح  $b = 3$

خلاصة : يوجد عددان حقيقيان و حيدان هما  $a = 4$  و  $b = 3$  يحققان أن معادلة مماس الدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة 0

$$y = 4x + 3$$

التمرين - 34

$a$  عدد حقيقي . نعتبر الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$

هل يوجد قيمة لـ  $a$  حيث تقبل الدالة  $f$  قيمة حدية عند  $x = 1$  ؟

الحل - 34

$f$  دالة كثير حدود إذن قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 3(ax^2 + 2x + 1) \text{ أي } f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$$

تكون لـ  $f$  قيمة حدية محلية عند  $x = 1$  إذا وفقط إذا انعدمت  $f'(x)$  من أجل  $x = 1$  مغيرة إشارتها

$$f'(1) = 0 \quad \text{أي :}$$

$$a(1)^2 + 2(1) + 1 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$a = -3 \quad \text{أي :}$$

$$f'(x) = 3(-3x^2 + 2x + 1) \quad \text{منه :}$$

لندرس الآن إشارة  $f'(x)$  أي إشارة  $-3x^2 + 2x + 1$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2+4}{-6} = \frac{2}{-6} = -1/3 \\ x_2 = \frac{-2-4}{-6} = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-1/3$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

نتيجة : من أجل  $a = -3$  فإن  $f'(1) = 0$  و  $f'$  تغير إشارتها من موجب إلى سالب حول 1

إذن :  $f$  تقبل قيمة حدية محلية عند  $x = 1$

التمرين - 35

ليكن (C) منحنى ذو المعادلة :  $xy + 4x + 3y + 7 = 0$

برهن أن النقطة  $A(-2; 1)$  تنتمي إلى (C) و أن (C) يقبل مماس عند A يطلب تعيين معادلته .

الحل - 35

لنعوض إحداثيات النقطة A في معادلة المنحنى (C) حيث :  $x = -2$  و  $y = 1$

$$xy + 4x + 3y + 7 = -2(1) + 4(-2) + 3(1) + 7$$

$$= -10 + 10$$

$$= 0 \quad \text{إذن : A تنتمي إلى (C)}$$

لنبحث عن عبارة  $y$  بدلالة  $x$  :

$$xy + 4x + 3y + 7 = 0 \Rightarrow xy + 3y = -7 - 4x$$

$$\Rightarrow y(x + 3) = -7 - 4x$$

$$\Rightarrow y = \frac{-7-4x}{x+3} \quad \text{حيث } x \neq -3$$

لنعتبر الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{-3\}$  بـ  $f(x) = \frac{-7-4x}{x+3}$

إذن : المنحنى (C) ذو المعادلة  $xy + 4x + 3y + 7 = 0$  هو منحنى الدالة  $f$  .

بما أن  $f$  دالة ناطقة فهي قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R} - \{-3\}$  و خاصة عند  $-2$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-4(x+3) - (-7-4x)}{(x+3)^2}$$

$$f'(-2) = \frac{-4(-2+3) - [-7-4(-2)]}{(-2+3)^2} = \frac{-4}{1} = -4 \quad \text{منه :}$$

إذن : معادلة المماس عند النقطة A من الشكل :  
 $y = -5(x+2) + f(-2)$   
 $y = -5(x+2) + 1$  أي :  
 $y = -5x - 9$  أي :

## التمرين - 36

- $a > 0$  ;  $c$  ;  $b$  ;  $a$  أعداد حقيقية حيث  
 $y = ax^2 + bx + c$  قطع مكافئ معادلته  
 ليكن  $x_0$  عدد حقيقي و  $M_0$  نقطة من (P) فصلتها  $x_0$   
 1 - عين معادلة المماس (T) للمنحنى (P) عند النقطة  $M_0$   
 2 - برهن أن (P) يقع فوق كل مماساته .  
 3 - عين مجموعة النقط M ذات الإحداثيات (x ; y) حيث يوجد مماس للمنحنى (P) عند النقطة M .

## الحل - 36

- 1 - لنعتبر الدالة f معرفة على IR بـ  $f(x) = ax^2 + bx + c$  حيث  $a > 0$   
 f قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة  $f'(x) = 2ax + b$   
 منه :  $f'(x_0) = 2ax_0 + b$   
 إذن معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$   
 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$   
 $y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + (ax_0^2 + bx_0 + c)$  أي :  
 $y = (2ax_0 + b)x - 2ax_0^2 - bx_0 + ax_0^2 + bx_0 + c$  أي :  
 $y = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c$  أي :  
 2 - ليكن (T) مماس لـ (P) عند نقطة كسيرة ذات الفاصلة  $x_0$   
 لدينا :  $f(x) - [(2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c] = ax^2 + bx + c - [(2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c]$   
 $= ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2$   
 $= a(x^2 - 2x_0x + x_0^2)$   
 $= a(x - x_0)^2$  موجب لأن  $a > 0$

نتيجة : الفرق موجب أو معدوم إذن المنحنى (P) يقع دائما فوق المماس (T) من أجل أي قيمة لـ  $x_0$  (أي فوق كل مماسات)  
 3 - بما أن f قابلة للإشتقاق على IR فإن مجموعة النقط M المطلوبة هي  $M(x ; ax^2 + bx + c)$  أي كل نقط القطع (P)

## التمرين - 37

إليك التمثيل البياني لدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال  $[0 ; 5]$  . المستقيم المرسوم على الشكل هو مماس للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

- 1 - بقراءة بيانية عين كل من  $f(1)$  و  $f'(1)$   
 2 - حل بيانيا في المجال  $[0 ; 5]$  المتراجحات التالية :  
 (أ)  $f(x) \geq 0$  (ب)  $f'(x) \geq 0$  (ج)  $f(x) \leq 1$

## الحل - 37

- 1 - من البيان نلاحظ ما يلي :  $f(1) = 2$  (بالإسقاط على محور الترتيب) . ميل المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو :

$$\tan \theta = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{3}{2}$$

إذن :  $f'(1) = 3/2$

- 2 - حسب المنحنى فإن :

$f(x) \geq 0$  تكافئ

$f'(x) \geq 0$  تكافئ

$f(x) \leq 1$  تكافئ

- لأن المنحنى فوق محور الفواصل  $x \in [1/4 ; 15/4]$   
 لأن المنحنى متصاعد (الدالة متزايدة)  $x \in ]0 ; 7/4]$   
 لأن المنحنى يقع تحت المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$   $x \in ]0 ; 1/2] \cup [3 ; 5]$

## التمرين - 38

n عدد طبيعي غير معدوم ، x عدد حقيقي يختلف عن 1

1 - بسط المجموع  $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

2 - استنتج تبسيط للعبارة  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

## الحل - 38

1 - لاحظ أن  $f_n(x)$  عبارة عن مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها  $x$

اذن :  $f_n(x) = 1 \times \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$  حيث  $x \neq 1$

أي :  $f_n(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

2 - العبارة  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$  هي مشتقة  $f_n(x)$  (لأن مشتقة مجموع هي مجموع المشتقات حسب الخواص) منه :  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = f_n'(x)$

أي :  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}$

$$= \frac{(nx^n + x^n)(x-1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - nx^n + x^{n+1} - x^n - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \text{ و هو المطلوب .}$$

مثال :  $n=3$  ؛  $x=2$

$$1 + 2x + 3x^2 = 1 + 2(2) + 3(2)^2 = 1 + 4 + 12 = 17 \text{ لدينا :}$$

$$1 + 2x + 3x^2 = \frac{3(2)^4 - 4(2)^3 + 1}{(2-1)^2} = \frac{48 - 32 + 1}{1} = 17 \text{ و بتطبيق العبارة المبسطة :}$$

## التمرين - 39

من أجل كل  $x$  من  $IR^*$  نضي  $f(x) = 1/x$  و  $f^{(n)}$  المشتقة ذات الرتبة  $n$  حيث  $n \in IN^*$  للدالة  $f$  برهن باستعمال الإستدلال بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$$

## الحل - 39

من أجل  $n=1$  :  $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

و  $\frac{(-1)^1 \times 1!}{x^{1+1}} = \frac{-1}{x^2}$

إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n=1$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n > 1$

هل :  $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \times (n+1)!}{x^{n+1+1}}$

لدينا :  $f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$

و حسب فرضية التراجع  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$

أي :  $f^{(n+1)}(x) = \left[ \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}} \right]'$

$= (-1)^n \times n! \times \left( \frac{1}{x^{n+1}} \right)'$  لأن العدد  $(-1)^n \times n!$  ثابت لا يتعلق بالمجهول  $x$

$$= (-1)^n \times n! \times \left( \frac{-(n+1)x^n}{x^{2n+2}} \right)$$

$$= (-1)^n \times n! \times \frac{(-1) \times (n+1) \times x^n}{x^n \times x^{n+2}}$$



$$\frac{(-1)^{n+1} \times n! (n+1)}{x^{n+2}}$$

$$\frac{(-1)^{n+1} \times (n+1)!}{x^{n+1+1}}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}} \quad n+1 \text{ أجل من أجل } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{نتيجة : من أجل كل } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{إذن الخاصية صحيحة من أجل } n+1$$

التمرين - 40

f دالة معرفة على IR و قابلة للاشتقاق مرتين و تحقق الشروط التالية :

$$f'(0) = 1 \quad ; \quad f(0) = 0 \quad \diamond$$

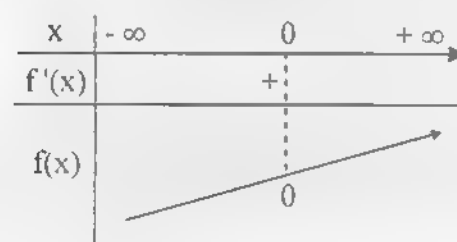
f' متزايدة على  $[0; +\infty[$  و متناقصة على  $]-\infty; 0]$   $\diamond$ 

أرسم جدول تغيرات الدالة f على IR

الحل - 40

لدينا  $f'(0) = 1$  و  $f'$  متزايدة على  $[0; +\infty[$  إذن :من أجل  $x > 0$  فإن  $f'(x) > f'(0)$ أي :  $f'(x) > 1$ و خاصة  $f'(x) > 0$  أي الدالة f متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$ و لدينا  $f'(0) = 1$  و  $f'$  متناقصة على  $]-\infty; 0]$  إذن :من أجل  $x < 0$  فإن  $f'(x) > f'(0)$ أي :  $f'(x) > 1$ و خاصة  $f'(x) > 0$  أي الدالة f متزايدة على المجال  $]-\infty; 0]$ 

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :



التمرين - 40

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x} \quad \text{بـ} \quad ]1; +\infty[ \quad \text{f دالة معرفة على المجال}$$

1 - أدرس تغيرات الدالة f

2 - برهن أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]1; 2[$ 

الحل - 40

1 - التغيرات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} - \sqrt{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \sqrt{x} = -\infty$$

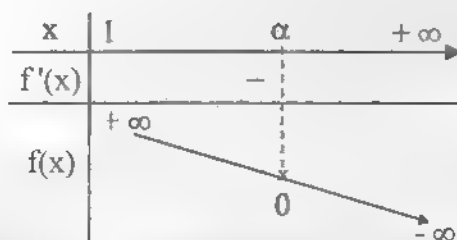
f مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على  $]1; +\infty[$ إذن : f قابلة للاشتقاق على  $]1; +\infty[$ 

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -1 \times \left( \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

إذن : من أجل كل x من  $]1; +\infty[$  :  $f'(x) < 0$ منه : f متناقصة على المجال  $]1; +\infty[$ 

جدول التغيرات :



$$f(2) = \frac{1}{2-1} - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} \quad -2$$

نتيجة :  $f$  مستمرة على  $]1; 2[$   
 $f$  متناقصة تماما على  $]1; 2[$   
 $f$  تأخذ قيم موجبة ثم سالبة على المجال  $]1; 2[$

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $]1; 2[$  يحقق  $f(\alpha) = 0$   
 ملاحظة : يمكن البحث عن قيمة تقريبية لـ  $\alpha$  بالتصنيف .

#### التمرين 41

إليك الشكل الموالي يمثل منحنى (C) لدالة  $f$  معرفة وقابلة للإشتقاق على  $[-3; 3]$  في معلم متعامد ومتجانس  $(\vec{i}; \vec{j}; 0)$  المنحنى يحقق الشروط التالية :

✓ يمر بمبدأ المعلم

✓ يشمل النقطة  $(-3; 9)$

✓ يقبل في النقطة B ذات الفاصلة 1 مماسا أفقيا .

✓ يقبل المستقيم (OA) كعماس عند النقطة O

1 - ماهو معامل توجيه المستقيم (OA)

نفرض أن  $f$  معرفة على  $[-3; 3]$   $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  حيث  $a, b, c, d$  أعداد حقيقية .

2 - بين باستعمال الشروط السابقة أن  $a = 1/3$  ;  $b = 1$  ;  $c = -3$  ;  $d = 0$

3 - حل  $f'(x)$  ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  .

#### الحل 41

1 - معامل توجيه المستقيم (OA) هو ميل هذا المستقيم أي ظل الزاوية التي يصنعها

مع الأفق أي :  $\tan \theta = -9/3 = -3$

2 - لتكن  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\text{إذن : } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

لدينا ثلاث شروط :  $f(0) = 0$  : المنحنى يمر بالمبدأ إذن : (1).....  
 $f(-3) = 9$  : المنحنى يشمل النقطة  $A(-3; 9)$  إذن : (2).....  
 ميل المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 هو -3 : إذن : (3).....  $f'(0) = -3$

$$\begin{aligned} \text{الشرط (1) أي } f(0) = 0 & \Rightarrow a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 0 \Rightarrow d = 0 \text{ منه} \\ \text{الشرط (2) أي } f(-3) = 9 & \Rightarrow a(-3)^3 + b(-3)^2 + c(-3) + 0 = 9 \Rightarrow -27a + 9b - 3c = 9 \text{ منه} \\ \text{الشرط (3) أي } f'(0) = -3 & \Rightarrow 3a(0)^2 + 2b(0) + c = -3 \Rightarrow c = -3 \text{ منه} \end{aligned}$$

$$\text{نتيجة : } d = 0 ; c = -3$$

$$\text{إذن : الشرط (2) يصبح } -27a + 9b + 9 = 9 \Rightarrow -27a + 9b = 0 \Rightarrow 9b = 27a \Rightarrow b = 3a \text{ أي}$$

$$\text{من جهة أخرى المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 أفقي أي } f'(1) = 0$$

$$\text{أي : } 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 0$$

$$\text{أي : } 3a + 6a - 3 = 0 \quad (\text{لأن } b = 3a \text{ و } c = -3)$$

$$\text{أي : } 9a = 3$$

$$\text{أي : } a = 1/3 \text{ منه } b = 3(1/3) = 1$$

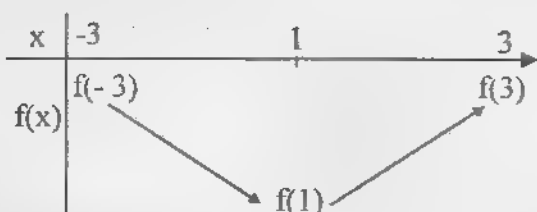
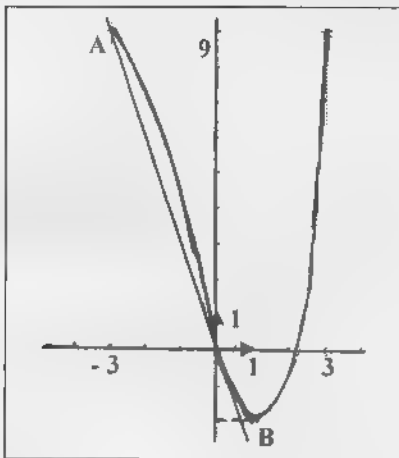
خلاصة :  $a = 1/3$  ;  $b = 1$  ;  $c = -3$  ;  $d = 0$  وهو المطلوب

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3 \text{ أي } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$= (x-1)(x+3)$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$+\infty$	$f'(x)$ إشارة
$f'(x)$	+	0	-	0	+

إتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[-3; 3]$  :



## التمرين - 42

$f_m$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  بـ  $f_m(x) = \frac{x^2 + m x}{x^2 - 1}$  مع  $m$  وسيط حقيقي .

- 1 - من أجل أي قيم  $m$  تكون الدالة  $f_m$  لا تقبل قيم حدية محلية ؟
- 2 - من أجل أي قيم  $m$  تكون الدالة  $f_m$  تقبل قيمتين حديتين محليتين أحدهما صغرى و الأخرى عظمى ؟

## الحل - 42

1 - نميز حالتين :

الأولى  $m = 0$  :  $f_0(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

إذن :  $f_0'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$

إذن : إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $-2x$

$x$	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-

إذن : الدالة تقبل قيمة حدية محلية عند  $x = 0$

الثانية  $m \neq 0$  :  $f_m(x) = \frac{x^2 + m x}{x^2 - 1}$  مع  $m \neq 0$

إذن :  $f_m'(x) = \frac{(2x + m)(x^2 - 1) - 2x(x^2 + m x)}{(x^2 - 1)^2}$

$= \frac{2x^3 - 2x + m x^2 - m - 2x^3 - 2m x^2}{(x^2 - 1)^2}$

$= \frac{-m x^2 - 2x - m}{(x^2 - 1)^2}$

إذن : إشارة  $f_m'(x)$  هي إشارة كثير الحدود  $-m x^2 - 2x - m$  كما يلي :

$\Delta = 4 - 4m^2 = 4(1 - m^2)$

نتيجة : تكون الدالة  $f$  لا تقبل قيمة حدية محلية إذا وفقط إذا كانت مشتقتها لا تغير إشارتها أي  $f'(x) \geq 0$  أو  $f'(x) \leq 0$  على طول مجال تعريفها وفي هذه الحالة (إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية) يكون هذا محقق إذا وفقط إذا كان  $\Delta \leq 0$

كما يلي :

$m$	-1	0	1	...
$\Delta = 4(1 - m^2)$	-	0	+	-

إذن  $m \in ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

خلاصة :  $f_m$  لا تقبل قيم حدية محلية من أجل  $m \in ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

2 - نميز حالتين :

✓  $m = 0$  غير محقق حسب السؤال (1) .

✓  $m \neq 0$  حتى تكون الدالة تقبل قيمتين حديتين محليتين يجب أن يتحقق أن دالتها المشتقة تتعدم مرتين مغيرة إشارتها

بالتناوب أي موجب سالب أو سالب موجب سالب . وفي هذه الحالة لدينا إشارة  $f'(x)$  هي إشارة كثير حدود

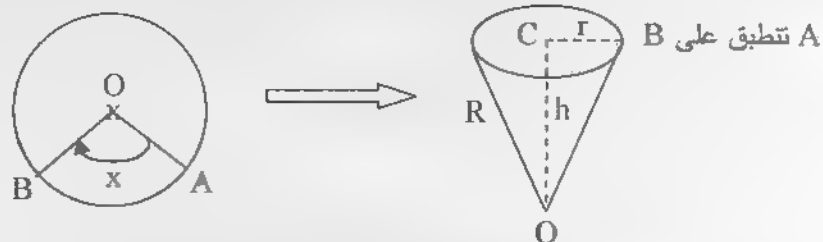
$-m x^2 - 2x - m$  حيث  $m \neq 0$  إذن يكفي أن يكون  $\Delta > 0$

أي  $4(1 - m^2) > 0$

منه :  $m \in ]-1; 0[ \cup ]0; 1[$

## التمرين - 43

نعتبر قرص مركزه  $O$  و نصف قطره  $R$  نقطع منه قطاعا زاويا  $(\vec{OA}; \vec{OB})$  قياسه  $x$  راديان كما هو موضح على الشكل ثم نلصق القطعتين  $[OA]$  و  $[OB]$  فنحصل على مخروط دوراني نصف قطر قاعدته  $r$  و إرتفاعه  $h$



1 - عبر عن  $r$  و  $h$  بدلالة  $x$  و  $R$ .2 - برهن أن حجم المخروط الدوراني الناتج معرف بالعلاقة  $V(x) = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$ 3 - أدرس تغيرات الدالة  $V$  على المجال  $]0; 2\pi[$ 4 - من أجل أي قيمة للعدد  $x$  يكون حجم المخروط الناتج أكبر ما يمكن ؟ أحسب هذا الحجم بدلالة  $R$ .

الحل - 43

1 - لدينا طول القوس  $\overline{AB}$  هو  $xR$ إذن : محيط قاعدة المخروط الدوراني الناتج هو  $p = xR$ من جهة أخرى :  $p = 2\pi r$  إذن :  $2\pi r = xR$ منه :  $r = \frac{xR}{2\pi}$  ..... (1) و هو المطلوب .بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث  $OAC$  القائم في  $C$  حيث  $C$  هو مركز قاعدة المخروط الناتج نحصل على :

$$r^2 + h^2 = R^2$$

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{أي :}$$

$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{xR}{2\pi}\right)^2} \quad \text{أي :}$$

$$h = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^2 - x^2 R^2}{4\pi^2}} \quad \text{أي :}$$

$$h = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2} \quad \text{أي :} \quad \text{..... (2) و هو المطلوب}$$

2 - حجم المخروط الدوراني الناتج هو :  $V(x) = \frac{1}{3} S \cdot h$  حيث  $S$  هي مساحة قاعدة المخروط و  $h$  هو ارتفاعه .

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{xR}{2\pi}\right)^2 = \frac{R^2 x^2}{4\pi} \quad \text{لدينا :}$$

$$V(x) = \frac{1}{3} \times \frac{R^2 x^2}{4\pi} \times \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2} \quad \text{منه}$$

$$V(x) = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2} \quad \text{منه : و هو المطلوب}$$

3 - تغيرات الدالة  $V$  على  $]0; 2\pi[$  :  $V(0) = 0$  ،  $v(2\pi) = 0$  ، والدالة  $V$  قابلة للإشتقاق على  $]0; 2\pi[$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{R^3}{24\pi^2} \left( 2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} + x^2 \times \frac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \right) \\ &= \frac{R^3}{24\pi^2} \left( \frac{4x(4\pi^2 - x^2) - 2x^3}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \right) \\ &= \frac{R^3}{24\pi^2} \left( \frac{16x\pi^2 - 6x^3}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \right) \end{aligned}$$

إن : إشارة  $v'(x)$  هي إشارة  $16x\pi^2 - 6x^3$  لأن  $\frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$  موجب .  
 $16x\pi^2 - 6x^3 = 2x(8\pi^2 - 3x^2)$ 

$x$	$-\infty$	$-\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$	$0$	$\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$	$2\pi + \infty$
$2x$			$0$	$+$	
$8\pi^2 - 3x^2$	$-$	$0$	$+$	$0$	
$v'(x)$	$+$	$0$	$0$	$+$	$0$

x	0	$\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$	$2\pi$
V'(x)		+	0

منه : إشارة V'(x) على المجال  $]0; 2\pi[$

x	0	$\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$	$2\pi$
V'(x)		+	0
V(x)	0	$V\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$	0

إذن : جدول تغيرات الدالة V على المجال  $]0; 2\pi[$

$$V\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \frac{R^3}{24\pi^2} \times \left(\frac{8}{3}\pi^2\right) \sqrt{4\pi^2 - \frac{8}{3}\pi^2} = \frac{R^3}{9} \sqrt{\frac{4\pi^2}{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$$

4 - لاحظ أن الدالة V تقبل قيمة حدية محلية عظمى على المجال  $]0; 2\pi[$  من أجل  $x = \pi\sqrt{\frac{8}{3}}$

$$V\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$$

إذن: الحجم الأعظمي هو

التمرين 44 =

إليك جدول تغيرات الدالة u معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال  $D_u = [-2; 3]$

x	-2	-1	0	1	2	3
u'(x)		+	0	-	0	+
u(x)	2	3	0	-1	0	2

1 - عين إشارة u(x) على  $[-2; 3]$   
نعتبر الدوال  $f; g; h; k$  معرفة على  $[-2; 3]$  كمايلي :  $f = u^2$  ;  $g = u^3$  ;  $h = 1/u$  ;  $k = \sqrt{u}$

2 - عين مجموعة تعريف كل دالة من الدوال  $f; g; h; k$

3 - عبر عن كل من  $f'(x)$  ;  $g'(x)$  ;  $h'(x)$  و  $k'(x)$  بدلالة  $u'(x)$  و  $u(x)$

4 - إستنتج جدول تغيرات كل دالة من الدوال  $f; g; h; k$  على مجموعة تعريفها

الحل 44 =

1 - من جدول تغيرات الدالة u نستنتج مايلي :

x	-2	0	2	3
u(x)	+	0	-	0

$$f(x) = [u(x)]^2 - 2 \quad \text{إذن } f \text{ معرفة على } [-2; 3]$$

$$g(x) = [u(x)]^3 \quad \text{إذن } g \text{ معرفة على } [-2; 3]$$

$$h(x) = \frac{1}{u(x)} \quad \text{إذن } h \text{ معرفة من أجل } u(x) \neq 0 \text{ أي على المجال } [-2; 0[ \cup ]0; 2[ \cup ]2; 3]$$

$$k(x) = \sqrt{u(x)} \quad \text{إذن } k \text{ معرفة من أجل } u(x) \geq 0 \text{ أي على المجال } [-2; 0] \cup [2; 3]$$

$$f'(x) = 2 u'(x) \times u(x)$$

$$g'(x) = 3 u'(x) \times [u(x)]^2$$

$$h'(x) = \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2} \quad \text{على المجال } [-2; 0[ \cup ]0; 2[ \cup ]2; 3]$$

$$k'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \text{ على المجال } [-2; 0[ \cup ]2; 3]$$

4 - ندرس في كل مرة إشارة المشتقة ثم نرسم جدول التغيرات :

الدالة  $f : f'(x) = 2 u'(x) u(x)$

x	-2	-1	0	1	2	3
$u'(x)$	+	0	-	0	+	
$u(x)$		+	0	-	0	+
الجداء	+	0	-	0	-	+

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  :

x	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	+	0	-	0	-	+
$f(x)$	4	9	0	1	0	4

$$f(-2) = [u(-2)]^2 = (2)^2 = 4$$

$$f(-1) = [u(-1)]^2 = (3)^2 = 9$$

$$f(0) = [u(0)]^2 = (0)^2 = 0$$

$$f(1) = [u(1)]^2 = (-1)^2 = 1$$

$$f(2) = [u(2)]^2 = (0)^2 = 0$$

$$f(3) = [u(3)]^2 = (2)^2 = 4$$

الدالة  $g : g'(x) = 3 u'(x) \times [u(x)]^2$

x	-2	-1	0	1	2	3
$u'(x)$	+	0	-	0	+	
$[u(x)]^2$		+	0	+	0	+
الجداء	+	0	-	0	+	+

منه جدول تغيرات الدالة  $g$  :

x	-2	-1	0	1	2	3
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$	8	27	0	-1	0	8

$$g(-2) = [u(-2)]^3 = (2)^3 = 8$$

$$g(-1) = [u(-1)]^3 = (3)^3 = 27$$

$$g(1) = [u(1)]^3 = (-1)^3 = -1$$

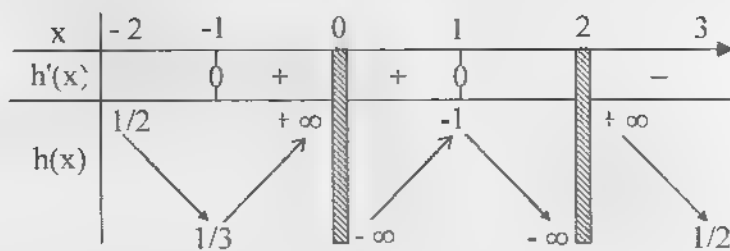
$$g(3) = [u(3)]^3 = (2)^3 = 8$$

الدالة  $h : h'(x) = \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$  من إشارة  $-u'(x)$  على المجال  $[-2; 0[ \cup ]0; 2[ \cup ]2; 3]$

x	-2	-1	0	1	2	3
$u'(x)$	+	0	-	-	0	+
$-u'(x)$	-	0	+	+	0	-

منه جدول تغيرات الدالة  $h$  :





$$h(-2) = \frac{1}{u(-2)} = 1/2$$

$$h(-1) = \frac{1}{u(-1)} = 1/3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty \quad (\text{لأن } u(x) \text{ موجبة على يسار } 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} = -\infty$$

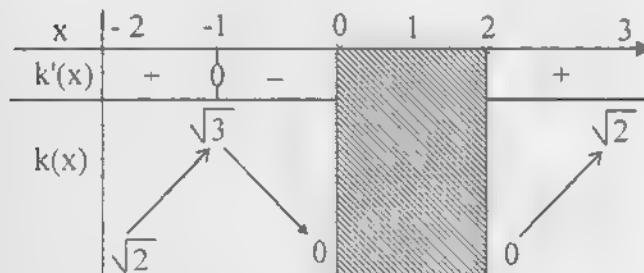
$$h(1) = \frac{1}{u(1)} = -1/1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} = -\infty \quad (\text{لأن } u(x) \text{ سالبة على يسار } 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$h(3) = \frac{1}{u(3)} = 1/2$$

$$k'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \quad \text{من إشارة } u'(x) \text{ على المجال } [-2; 0[ \cup ]2; 3]$$



منه جدول تغيرات :

$$k(-2) = \sqrt{u(-2)} = \sqrt{2}$$

$$k(-1) = \sqrt{u(-1)} = \sqrt{3}$$

$$k(0) = \sqrt{u(0)} = 0$$

$$k(2) = \sqrt{u(2)} = 0$$

$$k(3) = \sqrt{u(3)} = \sqrt{2}$$

## التمرين - 45

1 - أحسب الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$   $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

2 - استنتج الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية :

$$k : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x - 1}}$$

$$f : x \mapsto \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$$

$$g : x \mapsto \frac{x + 1}{\sqrt{x - 1}}$$

$$h : x \mapsto \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x^2+1)}{(x-1)^2}$$

## الحل - 45

$$= \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

لاحظ أن إذا اعتبرنا الدالة  $u : x \mapsto x$  فإن  $f(x) = \frac{[u(x)]^2 + 1}{u(x) - 1}$  مع  $u(x) - 1 \neq 0$

$$f'(x) = \frac{2 u'(x) u(x) (u(x) - 1) - u'(x) ([u(x)]^2 + 1)}{(u(x) - 1)^2} \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{u'(x) [u(x)]^2 - 2 u'(x) u(x) - u'(x)}{(u(x) - 1)^2}$$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{و} \quad u(x) = \sqrt{x} \quad \text{أي} \quad g(x) = f(\sqrt{x}) : \quad \text{إذن} \quad g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} \quad \text{2- لتكن}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x})^2 - 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$u'(x) = 2x \quad \text{و} \quad u(x) = x^2 \quad \text{أي} \quad h(x) = f(x^2) : \quad \text{إذن} \quad h(x) = \frac{x^4+1}{x^2-1} \quad \checkmark$$

$$h'(x) = \frac{2x(x^2)^2 - 2 \times 2x \times x^2 - 2x}{(x^2-1)^2} \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{2x^5 - 4x^3 - 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$x > 0 \quad \text{مع} \quad k(x) = \sqrt{f(x)} : \quad \text{إذن} \quad k(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}} \quad \checkmark$$

$$k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad \text{منه :}$$

$$k'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}} \quad \text{أي :}$$

$$k'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{2(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}} \quad \text{أي :}$$

$$\sin x - 1 \neq 0 \quad \text{مع} \quad u'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad u(x) = \sin x \quad \text{أي} \quad l(x) = f(\sin x) : \quad \text{إذن} \quad l(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1} \quad \checkmark$$

$$l'(x) = \frac{\cos x \cdot \sin^2 x - 2 \cos x \sin x - \cos x}{(\sin x - 1)^2} \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{\cos x (\sin^2 x - 2 \sin x - 1)}{(\sin x - 1)^2}$$

## التمرين - 46

من أجل كل عدد طبيعي أكبر تماماً من 1 نعرف الدالة  $f_n$  على  $\mathbb{R}$  بـ  $f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$

- 1 - أحسب نهايتي  $f_n$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ .
- 2 - أدرس تغيرات الدالة  $f_n$  (ميز بين  $n$  زوجي و  $n$  فردي).
- ليكن  $(C_n)$  منحنى الدالة  $f_n$  في معام متعامد و متجانس.
- 3 - تحقق أن المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  هو محور تناظر للمنحنى  $(C_n)$ .
- 4 - برر أن  $(C_n)$  يمر بأربع نقط ثابتة بطلب تعيينها.
- 5 - أرسم  $(C_1)$  (أي  $n = 1$ ).

## الحل - 46

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)^n = +\infty \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2)^n = +\infty$$

2 - التغيرات :  $f_n$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n(2x - 2)(x^2 - 2x)^{n-1} \\ &= 2n x^{n-1}(x-1)(x-2)^{n-1} \end{aligned}$$

إذن : إشارة  $f_n'(x)$  هي إشارة  $x^{n-1}(x-1)(x-2)^{n-1}$  لأن  $2n$  موجب تماماً لذلك نميز حالتين :

الحالة الأولى :  $n$  زوجي إذن  $(n-1)$  فردي

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$x^{n-1}$	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$(x-2)^{n-1}$	-	-	-	0	+
الجداء	-	0	+	0	+

منه جدول تغيرات الدالة  $f_n$  كما يلي :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f_n'(x)$	-	0	+	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

الحالة الثانية :  $n$  فردي إذن  $(n-1)$  زوجي

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$x^{n-1}$	+	0	+	+	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$(x-2)^{n-1}$	-	-	+	0	+
الجداء	-	0	-	0	+

منه جدول تغيرات الدالة  $f_n$  كما يلي :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	-1	0	$+\infty$

$$\begin{aligned}
 f_n(2-x) &= [(2-x)^2 - 2(2-x)]^n \quad \text{و} \quad (2-x) \in \mathbb{R} \quad \text{فإن} \quad \mathbb{R} \text{ من } x \text{ كل} \\
 &= [4 - 4x + x^2 - 4 + 2x]^n \\
 &= (x^2 - 2x)^n \\
 &= f_n(x)
 \end{aligned}$$

إن المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  محور تناظر للمنحنى  $(C_n)$

4 - من أجل  $x^2 - 2x = 0$ ، فإن  $f_n(x) = 0$  مهما يكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$

من أجل  $x^2 - 2x = 1$  فإن  $f_n(x) = 1$  مهما يكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$

لنحل إذن المعادلتين :  $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x = 1 &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \\
 \Delta &= 4 + 4 = 8
 \end{aligned}$$

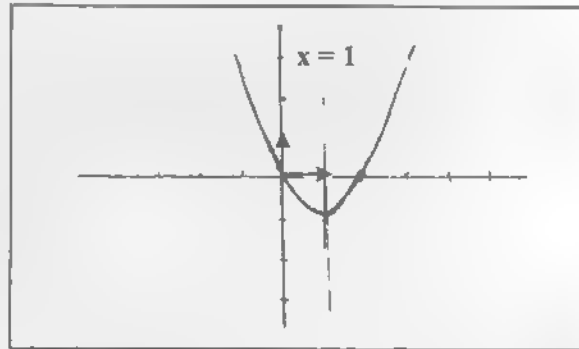
$$\begin{cases} x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

نتيجة : من أجل أي قيمة للعدد الطبيعي غير المعدوم  $n$  فإن النقط  $A(0; 0)$  ،  $B(2; 0)$  ،  $C(1 - \sqrt{2}; 1)$  ،  $D(1 + \sqrt{2}; 1)$  ثابتة من المنحنى  $(C_n)$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'_1(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

5 - إنشاء  $(C_1)$  :

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= x^2 - 2x \\
 f'_1(x) &= 2x - 2
 \end{aligned}$$



المنحنى :

التمرين - 47

الجزء I :

g دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  بـ  $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1 - أدرس تغيرات الدالة g .

2 - بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  محصور بين 1,6 و 1,7

3 - استنتج إشارة  $g(x)$  على  $]-1; +\infty[$

الجزء II :

f دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$  . نسمي (C) منحنىها في معط متعامد ومتجانس  $(\vec{i}; \vec{j})$

1 - بين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  . أعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين .

2 - أدرس تغيرات الدالة f على  $]-1; +\infty[$  .

3 - عين معادلة لـ  $(\Delta)$  مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4 - تحقق أن من أجل كل  $x$  من  $]-1; 1[$  :  $f(x) - (-x+1) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$

5 - استنتج الوضعية النمسية للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (Δ)

6 - أرسم كل من (C) و (Δ)

الحل - 47

الجزء I :

1 - تغيرات الدالة g :

g معرفة وقابلة للإشتقاق على IR و خاصة على  $]-1; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+

منه جدول تغيرات الدالة g على  $]-1; +\infty[$ 

$x$	-1	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	-6	-1	-2	$+\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1) = -2 - 3 - 1 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$g(1,6) = 2(4,096) - 3(2,56) - 1 = -0,488$$

$$g(1,7) = 9,826 - 8,67 - 1 = 0,156$$

لدينا الشروط التالية :  $\left. \begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [1,6; 1,7] \\ g(1,6) \times g(1,7) < 0 \end{array} \right\}$ إذن : حسب ميرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد  $\alpha$  من المجال  $[1,6; 1,7]$  يحقق  $g(\alpha) = 0$ و بما أن g متزايدة تماماً على  $[1,6; 1,7]$  فإن  $\alpha$  وحيد (أنظر جدول تغيرات الدالة g)

3 - إشارة g(x) :

x	-1	1,6	$\alpha$	1,7	$+\infty$
$g(x)$	-	-	0	+	+

الجزء II :

1 -

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{1+x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-(-1)}{1+(-1)^3}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \geq 0}} \frac{2}{y}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^3} = 0$$

التفسير الهندسي :

إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب عمودي على يمين -1 معادلته  $x = -1$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي عند  $+\infty$  معادلته  $y = 0$  (محور الفواصل)

2 - التغيرات :

f دالة ناطقة إذن قابلة للإشتقاق على مجال تعريفها و خاصة على  $]-1; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{-1 - x^3 - 3x^2 + 3x^3}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2}$$

منه إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $g(x)$  لأن  $(1+x^3)^2$  موجب كما يلي :

x	-1	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $]-1; +\infty[$

x	-1	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	0

3 - معادلة  $(\Delta)$  : مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = -1/1 = -1 \\ f(0) = 1/1 = 1 \end{array} \right\} : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

منه معادلة  $(\Delta)$  :  $y = -x + 1$

4 - من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$  فإن

$$f(x) - (-x + 1) = \frac{1-x}{1+x^3} - (-x + 1)$$

$$= \frac{1-x - (-x - x^4 + 1 + x^3)}{1+x^3}$$

$$= \frac{1-x + x + x^4 - 1 - x^3}{1+x^3}$$

$$= \frac{x^3(x-1)}{1+x^3}$$

وهو المطلوب

5 - إشارة  $f(x) - (-x + 1)$  على المجال  $]-1; +\infty[$

x	-1	0	1	$+\infty$
$x^3$	-	0	+	
$x-1$		-	0	+
$1+x^3$			+	
$\frac{x^3(x-1)}{1+x^3}$	+	0	-	+

خلاصة : لما  $x \in ]-1; 0[ \cup ]1; +\infty[$  (C) يقع فوق  $(\Delta)$

لما  $x \in ]0; 1[$  (C) يقع تحت  $(\Delta)$

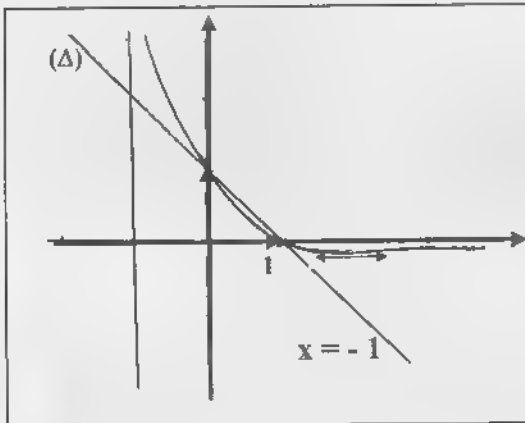
لما  $x \in \{0; 1\}$  (C) يقطع  $(\Delta)$

التمرين 48 -

$f$  دالة معرفة على المجموعة  $D_f$  بـ  $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$  مع  $D_f = ]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$  نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(\vec{i}; \vec{j}; 0)$

1 - أحسب نهايات الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$

2 - بين أن المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x + 3$  مقارب للمنحنى (C) بجوار  $+\infty$





3 - هل  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 ؟ عند 4 - ؟

4 - أحسب  $f'(x)$  من أجل  $x \in D_f - \{0; -4\}$

5 - أنشئ جدول تغيرات الدالة  $f$  ثم المنحنى (C)

الحل = 48

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}) \times \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 4x}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$\sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x}\right)} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1}{x + 1 - |x| \sqrt{1 + \frac{4}{x}}}$$

$$x \rightarrow -\infty \quad \text{لما} \quad |x| = -x \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x \left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{x + 1 + x \sqrt{1 + \frac{4}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x \left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \frac{-2}{1+1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - 2x - 3 = -2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2) \right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - (x^2 + 4x + 4)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}$$

$$y = 2x + 3 \quad \text{إن المستقيم ذو المعادلة} \quad = 0$$

مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار  $+\infty$

3 - لا يمكن لـ  $f$  أن تكون قابلة للاشتقاق عند 0 لأنها ليست معرفة على يسار 0

لا يمكن لـ  $f$  أن تكون قابلة للاشتقاق عند 4 - لأنها ليست معرفة على يمين 4 -

$$f'(x) = 1 + \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}} \quad \text{فإن} \quad x \in D_f - \{0; -4\}$$

$$= 1 + \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$$

5 - إشارة  $f'(x)$  :

$$\left. \begin{array}{l} x+2 > 0 \\ \sqrt{x^2+4x} > 0 \end{array} \right\} \text{ لدينا } ]0; +\infty[$$

$$\text{إذن : } 1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} > 0 \text{ أي } f'(x) > 0$$

$$\text{ب. على المجال } ]-\infty; -4[ \text{ لدينا : } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq -\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)^2 \quad \text{لأن الطرفين موجبين لما } x \in ]-\infty; -4[$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{x^2+4x+4}{x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x \geq x^2+4x+4$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq 4 \text{ مستحيل.}$$

إذن على المجال  $]-\infty; -4[$  لا يمكن أن يكون  $f'(x) \geq 0$  أي  $f'(x) < 0$

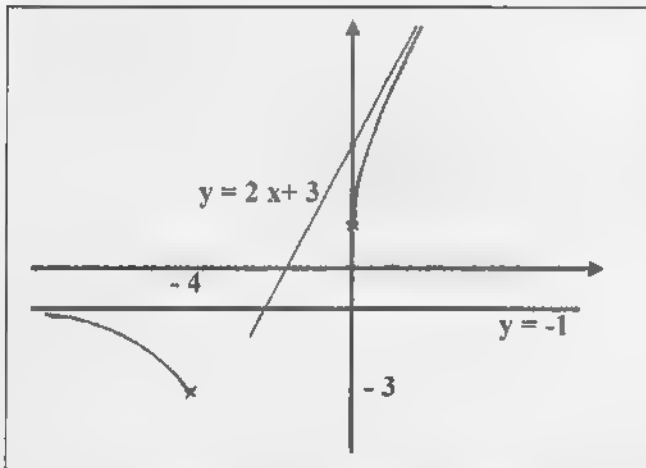
خلاصة : إشارة  $f'(x)$  :

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	
f(x)	-1	-3	1	$+\infty$

الإشعاء :



التمرين - 49

f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على IR حيث  $f(0) = 0$  و من أجل كل عدد حقيقي x فإن  $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$  نقبل أن الدالة f موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها  $f(x)$  ونسمي (C) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

g دالة معرفة على IR بـ  $g(x) = f(x) + f(-x)$

1 - برر أن g قابلة للإشتقاق على IR ثم عين  $g'(x)$

2 - أحسب  $g(0)$  . ثم استنتج أن الدالة f فردية

لتكن h دالة معرفة على المجال I حيث  $I = ]0; +\infty[$  بـ  $h(x) = f(x) + f(1/x)$

3 - برر أن h قابلة للإشتقاق على I ثم أحسب  $h'(x)$

4 - برهن أن من أجل كل x من I فإن  $h(x) = 2f(1)$

5 - استنتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2f(1)$  . فسر النتيجة هندسيا .

k دالة معرفة على  $]-\pi/2; \pi/2[$  بـ  $k(x) = f(\tan x) - x$

6 - أحسب  $k'(x)$  ماذا ينتج عن الدالة k ؟

7 - أحسب  $f(1)$ 8 - أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ 

9 - أرسم المنحنى (C) و اكتب معادلات مماساته عند النقاط التي فواصلها 0 ; -1 ; 1

الحل - 491 - لنكن  $u$  دالة حيث  $x \mapsto -x$   $u$  منه  $u$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $u'(x) = -1$ 

$$\text{إذن : } f(-x) = f(u(x)) = f \circ u(x)$$

منه : الدالة  $x \mapsto f(-x)$  هي مركب الدالتين  $u$  و  $f$  إذن هي دالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ 

$$\text{و دالتها المشتقة هي : } x \mapsto u'(x) \times f'(u(x))$$

$$\text{أي : } x \mapsto -1 \cdot f'(-x)$$

$$\text{أي : } x \mapsto \frac{-1}{(-x)^2 + 1} = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

خلاصة :  $g$  هي مجموع دالتين  $f$  و  $f \circ u$  قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  إذن  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة

$$\text{هي : } g'(x) = f'(x) + (-1) f'(-x)$$

$$= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$= 0 \quad \text{إذن الدالة } g \text{ ثابتة على } \mathbb{R}$$

$$g(0) = f(0) + f(-0) = 2f(0) = 0 \quad \text{2 -}$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $g(x) = g(0) = 0$  لأن  $g$  ثابتة .أي : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $f(x) + f(-x) = 0$ أي : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $f(-x) = -f(x)$ منه : الدالة  $f$  فردية3 - لنكن  $u$  حيث  $x \mapsto 1/x$  دالة معرفة على  $I = ]0 ; +\infty[$  $u$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و دالتها المشتقة  $u'(x) = -1/x^2$ منه : الدالة  $x \mapsto f(1/x)$   $u$  لأنها مركب الدالتين  $f$  و  $u$  و دالتها المشتقة كمايلي :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

$$= \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{(1/x)^2 + 1}$$

$$= \frac{-1}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-1}{x^2 + 1}$$

خلاصة :  $h$  هي مجموع دالتين  $f$  و  $f \circ u$  قابلتين للاشتقاق على  $I$ إذن :  $h$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و دالتها المشتقة هي :

$$h'(x) = f'(x) + \left( \frac{-1}{x^2 + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$= 0 \quad \text{إذن الدالة } h \text{ ثابتة}$$

$$h(1) = f(1) + f(1/1) = f(1) + f(1) = 2f(1) \quad \text{4 - لدينا}$$

لكن  $h$  دالة ثابتة إذن : من أجل كل  $x$  من  $I$  فإن  $h(x) = h(1)$ أي : من أجل كل  $x$  من  $I$  فإن  $h(x) = 2f(1)$ 5 - لدينا من أجل كل  $x$  من  $]0 ; +\infty[$  فإن  $h(x) = f(x) + f(1/x)$ 

$$2f(1) = f(x) + f(1/x) \quad \text{أي :}$$

$$f(x) = 2f(1) - f(1/x) \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2f(1) - f(1/x)] \quad \text{منه :}$$

$$= 2 f(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(1/x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0 \quad \text{لأن} \quad = 2 f(1) - \lim_{y \rightarrow 0} f(y)$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 f(1) - 0$  لأن  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) - f(0) = 0$  (f قابلة للإشتقاق عند 0 إذن فهي مستمرة عند 0)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 f(1) \quad \text{أي :}$$

تفسير هندسي : المستقيم ذو المعادلة  $y = 2 f(1)$  مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار  $+\infty$

$$k(x) = f(\tan x) - x \quad - 6$$

نعرف الدالة  $u : x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  على  $]-\pi/2 ; \pi/2[$

$$u'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{إذن :}$$

$$k'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) - 1 \quad \text{لأن} \quad k'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \times f'(\tan x) - 1 \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\tan^2 x + 1} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} - 1$$

$$= 1 - 1$$

$$] - \pi/2 ; \pi/2[ \quad \text{إذن الدالة } k \text{ ثابتة على}$$

$$k(0) = f[\tan(0)] - 0 \quad \text{بما أن :}$$

$$= f(0) - 0$$

$$= 0 - 0$$

$$= 0$$

فإن الدالة k معدومة على  $]-\pi/2 ; \pi/2[$  أي :

$$k(x) = 0 \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } ] - \pi/2 ; \pi/2[ \quad \text{فإن}$$

$$\text{أي : } 1(\tan x) - x = 0 \quad \text{وهذا من أجل كل } x \text{ من } ] - \pi/2 ; \pi/2[$$

$$f(\tan \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4} = 0 \quad \text{من أجل } x = \pi/4 \quad \text{نحصل على :}$$

$$f(\tan \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} \quad \text{أي :}$$

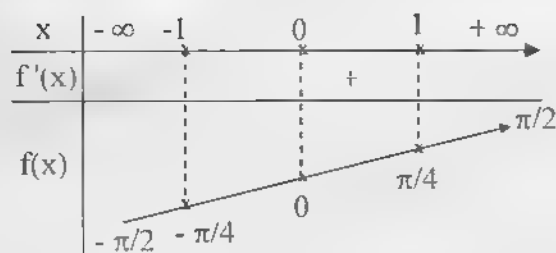
$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{لأن} \quad f(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{أي :}$$

نتيجة :  $f(1) = \pi/4$

$$\left. \begin{array}{l} \text{f فردية} \\ f(1) = \pi/4 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 f(1) = \pi/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{8 - جدول تغيرات الدالة } f \text{ على } \mathbb{R} \\ \text{حسب الأسئلة السابقة نحصلنا على :} \end{array}$$

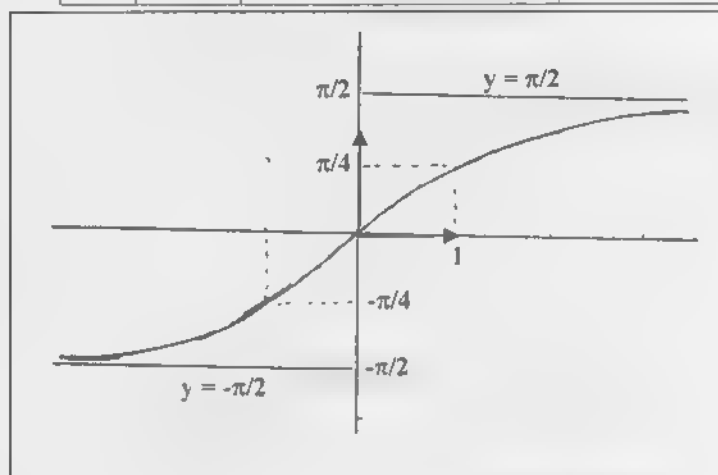
بما أن f فردية فإن يمكن إستنتاج مايلي :

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -\pi/4 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\pi/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{منه جدول تغيرات الدالة } f \text{ كمايلي :} \end{array}$$



9 — معادلات المماسات عند النقاط ذات الفواصل : 1 ; 0 ; - 1 :

$x_0$	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	معادلة المماس
0	0	$\frac{1}{0+1} = 1$	$y = x$
-1	$-\pi/4$	$\frac{1}{(-\pi/4)^2 + 1} = \frac{16}{16 + \pi^2}$	$y = \frac{16}{16 + \pi^2} (x + 1) - \frac{\pi}{4}$
1	$\pi/4$	$\frac{1}{(+\pi/4)^2 + 1} = \frac{16}{16 + \pi^2}$	$y = \frac{16}{16 + \pi^2} (x - 1) + \frac{\pi}{4}$



المنحنى :

### التمرين — 50

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \sin^2 x$  نسمي (C) منحنىها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(\vec{i}; \vec{j}; 0)$

- 1 — برهن أن  $f$  دورية ذات الدور  $\pi$
- 2 — برهن أن محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى (C).
- 3 — أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0; \pi/2]$
- 4 — أرسم المنحنى (C) على المجال  $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

### الحل — 50

1 — من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $(x + \pi) \in \mathbb{R}$  ولدينا :

$$\begin{aligned}
 f(x + \pi) &= \sin^2(x + \pi) \\
 &= [\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi]^2 \\
 &= (-\sin x + 0)^2 \\
 &= \sin^2 x \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

إذن :  $f$  دورية و دورها  $\pi$

نتيجة : يكفي دراسة الدالة  $f$  على مجال طوله  $\pi$

2 — من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $(-x) \in \mathbb{R}$  ولدينا :

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= \sin^2(-x) \\
 &= (-\sin x)^2 \\
 &= \sin^2 x \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

إذن :  $f$  دالة زوجية منه المنحني (C) يقبل محور الترتيب كمحور تناظر

3 - تغيرات الدالة  $f$  على  $[0 ; \pi/2]$

$f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و خاصة على  $[0 ; \pi/2]$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2 \cos x \sin x$$

$x$	0	$\pi/2$
$\cos x$	+	0
$\sin x$	0	+
$f'(x)$	0	+

إشارة  $f'(x)$  :

$x$	0	$\pi/2$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	1

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $[0 ; \pi/2]$

4 - لرسم المنحني على  $[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$  نتبع الخطوات التالية :

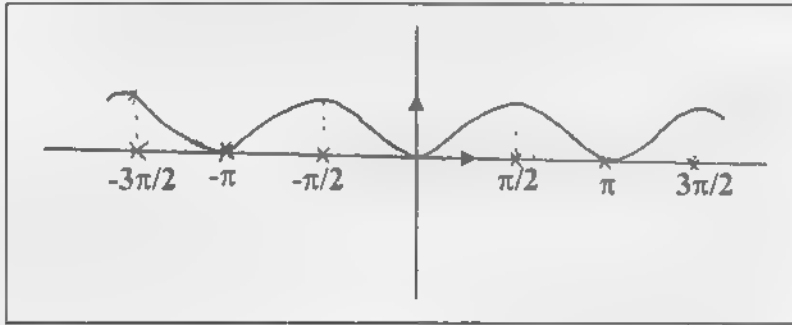
✓ نرسم جزء المنحني على المحال  $[0 ; \pi/2]$  حسب جدول التغيرات .

✓ بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب نرسم الجزء من المنحني على المجال  $[-\pi/2 ; 0]$

✓ بإجراء إنسحاب للمنحني على المجال  $[-\pi/2 ; \pi/2]$  نرسم الأجزاء من المنحني على المجالين  $[\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} + \pi]$  أي

$[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$  و  $[-\frac{\pi}{2} - \pi ; -\frac{\pi}{2}]$  أي  $[-\frac{3\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2}]$  هكذا نتحصل على المنحني (C) على المجال

$[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$  كما يلي :



### التمرين 51

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$   $\rightarrow f(x) = \sin 3x - 3 \sin x$

1 - قارن بين  $f(x)$  و كل من  $f(x + 2\pi)$  ;  $f(-x)$  ;  $f(\pi - x)$

2 - برهن أنه يكفي دراسة تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0 ; \pi/2]$

3 - برهن أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = -6 \sin x \sin 2x$

4 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  على  $[0 ; \pi/2]$

5 - أرسم منحنى الدالة  $f$  على  $[-\pi ; \pi]$

### الحل 51

1 - من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$  و  $(-x) \in \mathbb{R}$  و  $(\pi - x) \in \mathbb{R}$  حيث :

$$f(x + 2\pi) = \sin 3(x + 2\pi) - 3 \sin(x + 2\pi)$$

$$= \sin(3x + 6\pi) - 3 \sin(x + 2\pi)$$

$$= \sin 3x - 3 \sin x$$

و هو المطلوب (1)  $= f(x)$

$$f(-x) = \sin(-3x) - 3 \sin(-x)$$

$$= -\sin 3x + 3 \sin x$$

$$= -(\sin 3x - 3 \sin x)$$

و هو المطلوب (2)  $= -f(x)$

$$f(\pi - x) = \sin 3(\pi - x) - 3 \sin(\pi - x)$$

$$= \sin(3\pi - 3x) - 3 \sin x$$

$$= \sin 3x - 3 \sin x$$

$$= f(x) \quad \text{و هو المطلوب (3)}$$

2 - خلاصة : حسب السؤال (1) لدينا

$$f(x+2\pi) - f(x) \quad \checkmark \quad \text{إذن : } 2\pi \text{ هو دور الدالة } f$$

منه : يكفي دراستها على مجال طوله  $2\pi$  و ليكن  $[-\pi; \pi]$

$$f(-x) = -f(x) \quad \checkmark \quad \text{إذن : } f \text{ فردية أي المبدأ } (0; 0) \text{ هو مركز تناظر للمنحنى .}$$

منه : يكفي دراسة الدالة  $f$  على المجال  $[0; \pi]$

$$\checkmark \quad \text{ندرس الدالة } f \text{ على } [0; \pi/2] \text{ ثم باستعمال العلاقة } f(\pi-x) - f(x) \text{ نحصل على المنحنى على المجال } [\pi/2; \pi]$$

$$\text{لأن : } 0 \leq x \leq \pi/2$$

$$\text{أي : } -\pi/2 \leq -x \leq 0$$

$$\text{أي : } \pi - \pi/2 \leq \pi - x \leq \pi$$

$$\text{أي : } \pi/2 \leq \pi - x \leq \pi$$

$\checkmark$  بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ نحصل على المنحنى على الجزء  $[-\pi; -\pi/2]$

نتيجة يكفي دراسة تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0; \pi/2]$

$3 - f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 3\cos 3x - 3\cos x$$

$$= 3[\cos 3x - \cos x]$$

$$= 3[\cos(2x+x) - \cos x]$$

$$= 3[\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x - \cos x]$$

$$= 3[\cos x(\cos 2x - 1) - \sin 2x \sin x]$$

$$\text{لأن } \cos 2x - 1 = -2\sin^2 x \quad \checkmark \quad = 3[\cos x(-2\sin^2 x) - \sin 2x \sin x]$$

$$= 3[-2\sin^2 x \cos x - \sin 2x \sin x]$$

$$= -3\sin x [2\sin x \cos x + \sin 2x]$$

$$\text{لأن } 2\sin x \cos x = \sin 2x \quad \checkmark \quad = -3\sin x [\sin 2x + \sin 2x]$$

$$= -3\sin x [2\sin 2x]$$

$$\text{و هو المطلوب} \quad = -6\sin x \sin 2x$$

4 - التغيرات على المجال  $[0; \pi/2]$

$$f'(x) = -6\sin x \sin 2x \quad \text{و } [0; \pi/2] \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

$$\text{لاحظ أن : } 0 \leq x \leq \pi/2 \quad \text{أي } 0 \leq 2x \leq \pi \quad \text{منه : } \sin 2x \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -6 < 0 \\ \sin x \geq 0 \\ \sin 2x \geq 0 \end{array} \right\} \text{إذن : من أجل كل } x \text{ من } [0; \pi/2] \text{ فإن } f'(x) \leq 0 \text{ لأن}$$

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $[0; \pi/2]$



$$f(0) = \sin 0 - 3 \sin 0 = 0$$

$$-4 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} - 3 \sin \frac{\pi}{2} = -1 - 3 = -4$$

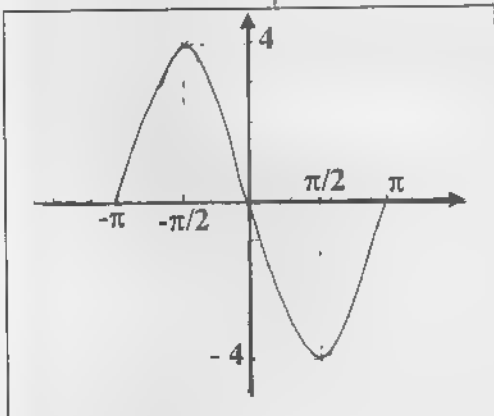
5 - رسم المنحنى على  $[-2\pi; 2\pi]$

باستعمال الخواص المطلوبة في السؤال (1) نحصل على جدول التغيرات

التالي :

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	$\pi$
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	0	4	0	-4	0

منه المنحنى التالي :





## التمرين 52

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس  $(\vec{0}; \vec{i}; \vec{j})$

- 1 - برهن أن الدالة  $f$  دورية و دورها  $2\pi$
- 2 - برهن أن محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى (C).
- 3 - أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = \sin x [1 - 2 \cos x]$
- 4 - أدرس إشارة  $f'(x)$  على المجال  $[0; \pi]$
- 5 - أرسم جزء المنحنى (C) على المجال  $[-\pi; \pi]$
- 6 - كيف يمكن إستنتاج المنحنى (C) على  $\mathbb{R}$  ؟

## الحل 52

1 - من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$  و

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \frac{1}{2} \cos 2(x + 2\pi) - \cos(x + 2\pi) \\ &= \frac{1}{2} \cos(2x + 4\pi) - \cos x \\ &= \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن  $f$  دورية و دورها  $2\pi$

2 - من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $(-x) \in \mathbb{R}$  و :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{2} \cos(-2x) - \cos(-x) \\ &= \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن  $f$  دالة زوجية أي منحناها (C) يقبل محور الترتيب كمحور تناظر .

3 -  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} (-2 \sin 2x) - (-\sin x) \\ &= -\sin 2x + \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \quad \text{لأن} \\ &= - (2 \sin x \cos x) + \sin x \\ &= \sin x (1 - 2 \cos x) \quad \text{و هو المطلوب} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \sin x (1 - 2 \cos x) \quad \text{— 4}$$

على المجال  $[0; \pi]$  لدينا :  $1 - 2 \cos x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2 \cos x$

$$\Leftrightarrow \cos x \leq 1/2$$

$$\Leftrightarrow x \in [\pi/3; \pi]$$

منه جدول إشارة  $f'(x)$  كمايلي :

x	0	$\pi/3$	$\pi$
$\sin x$	0	+	0
$1 - 2 \cos x$	-	0	+
$f'(x)$	0	-	+

5 - جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $[0; \pi]$

x	0	$\pi/3$	$\pi$
$f'(x)$	0	-	+
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$

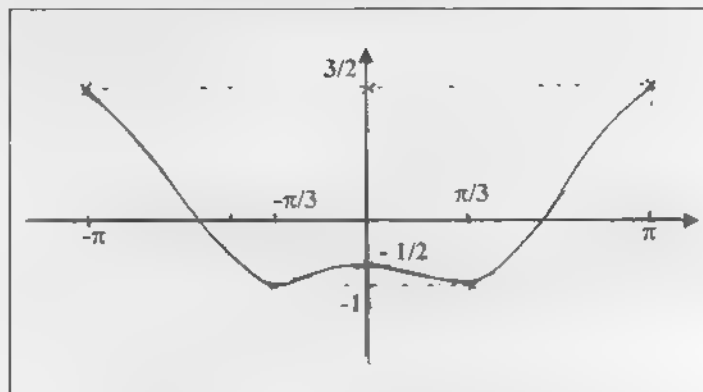
$$f(0) = \frac{1}{2} \cos 0 - \cos 0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos 2\frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$f(\pi) = \frac{1}{2} \cos 2\pi - \cos \pi = \frac{1}{2}(1) - (-1) = \frac{3}{2}$$

إنشاء المنحنى على  $[-\pi; \pi]$  (بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب نرسم الجزء على  $[-\pi; 0]$  كما في الشكل :

6 - الإنشاء على  $\mathbb{R}$  : بإجراء انسحاب للمنحنى (C) على مجالات طولها  $2\pi$  نحصل على المنحنى على  $\mathbb{R}$



التمرين = 53

$f$  دالة معرفة على  $[0; 1]$   $\rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

نسمي (C) منحنىها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(\vec{i}; \vec{j}; 0)$

1 - هل الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

2 - أدرس تغيرات الدالة  $f$

3 - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة  $1/2$

4 - أرسم في نفس المعلم كل من (T) و (C) و (C') حيث (C') هو نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى محور الفواصل .

5 - نضع  $(\gamma) = (C) \cup (C')$  و لتكن  $M(x; y)$  نقطة من المستوى .

برهن أن :  $M \in (\gamma)$  إذا وفقط إذا كان  $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$

ملاحظة : المنحنى  $(\gamma)$  يسمى Cissoïde de Dioclès

6 - I نقطة ذات الإحداثيات  $(1; 0)$  و (E) الدائرة ذات القطر (OI)

(Δ) مماس الدائرة (E) عند النقطة I

(d) المستقيم الذي يشمل O و معلم توجيهه العدد الحقيقي  $t$  حيث  $t \neq 0$  .

عين إحداثيات النقطة M نقطة تقاطع الدائرة (E) و المستقيم (d) حيث M تختلف عن O .

7 - عين إحداثيات M' نقطة تقاطع  $(\gamma)$  و المستقيم (d) حيث M' تختلف عن O .

الحل = 53

1 - الدالة  $f$  ليست معرفة على يسار 0 إذن :  $f$  ليست قابلة للاشتقاق عند 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{x} \quad \text{و لدينا}$$

$$\begin{aligned} \text{لما } x > 0 \quad \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} &= x \sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن :  $f$  قابلة للاشتقاق على يمين 0 و عددها المشتق هو 0

2 - التغيرات :  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $]0; 1]$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \left( \frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2} \right) \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3} = x\sqrt{x} \quad \text{لأن } x > 0 \quad \text{اذن} &= \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ &= \frac{x^2(3-2x)}{2x(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \\ &= \frac{x(3-2x)}{2(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \end{aligned}$$

اذن إشارة  $f'(x)$  على  $]0; 1[$  هي إشارة  $3-2x$  فقط لأن  $\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ (1-x)^2 > 0 \\ \sqrt{\frac{1-x}{x}} > 0 \end{array} \right\}$  منه جدول إشارة  $f'(x)$

x	0	1	3/2	$+\infty$
3-2x			0	-

x	0	1
$f'(x)$		+
f(x)	0	$+\infty$

منه جدول تغيرات الدالة f على  $[0; 1]$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{1/y} = +\infty$$

3 - معادلة المماس (T) عند النقطة ذات العاصلة 1/2 تكتب من الشكل

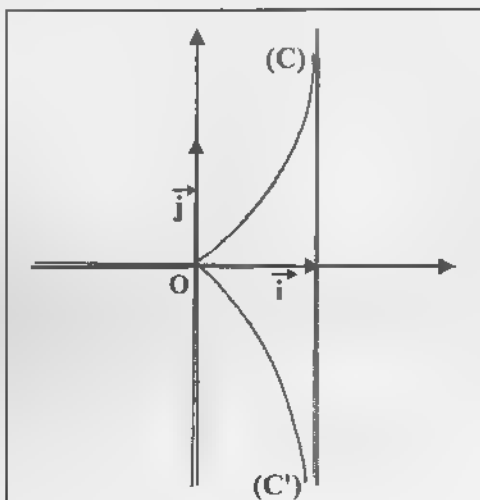
$$y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}(3-1)}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1/2}} = \frac{1}{2(1/4)} \sqrt{1} = 2 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1/8}{1/2}} = \sqrt{1/4} = 1/2 \end{cases}$$

$$y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \quad \text{منه معادلة (T)}$$

$$y = 2x - \frac{1}{2} \quad \text{أي}$$

4 - الإنشاء :



5 - لدينا معادلة المنحنى (C') هي :  $y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$  حيث  $x \in [0; 1]$

اذن تكون  $M(x; y)$  تنتمي إلى  $(C) \cup (C')$  إذا فقط إذا كان  $M \in (C)$  أو  $M \in (C')$  أي تكون  $M(x; y)$  تنتمي إلى  $(\gamma)$  إذا فقط إذا كان

$$y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} \quad \text{أو} \quad y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

$$y^2 = \frac{x^3}{1-x} \quad \text{أي :}$$

$$y^2(1-x) = x^3 \quad \text{أي :}$$

$$y^2 - x y^2 = x^3 \quad \text{أي :}$$

$$y^2 = x^3 + x y^2 \quad \text{أي :}$$

$$y^2 = x(x^2 + y^2) \quad \text{أي :}$$

$$x(x^2 + y^2) - y^2 = 0 \quad \text{و هو المطلوب .}$$

6 -  $I(1; 0)$  إذن  $OI = 1$  منه نصف قطر الدائرة (E) هو  $1/2$  و مركزها  $w(1/2; 0)$  إذن معادلتها

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{أي :} \quad x^2 + y^2 - x = 0 \quad \text{معادلة (E)}$$

لاحظ أن مماس الدائرة (E) عند النقطة I هو المستقيم  $\Delta$  ذو المعادلة  $x = 1$  (مقارب للمنحنى ((C))

(d) يشمل المبدأ و معامل توجيهه  $t$  إذن معادلته تكتب من الشكل  $y = tx$

لتكن  $M(x; y)$  نقطة من (d) أي  $M(x; tx)$

$$\text{تكون } M \text{ نقطة من (E) إذا وفقط إذا كان :}$$

$$x^2 + (tx)^2 - x = 0$$

$$x^2 + t^2 x^2 - x = 0 \quad \text{أي :}$$

$$x^2(1 + t^2) - x = 0 \quad \text{أي :}$$

$$x[(1 + t^2)x - 1] = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \frac{1}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$\text{منه (d) يقطع (E) في نقطتين هما } O(0; 0) \text{ و } M\left(\frac{1}{1+t^2}; \frac{t}{1+t^2}\right)$$

7 - لتكن  $M'(x; y)$  نقطة من (d) إذن  $M'(x; tx)$

$$\text{تكون } M' \text{ نقطة من } (\gamma) \text{ إذا وفقط إذا كان } \left. \begin{matrix} x \in [0; 1[ \\ x(x^2 + t^2 x^2) - t^2 x^2 = 0 \end{matrix} \right\} \text{..... (1)}$$

$$x^3 + t^2 x^3 - t^2 x^2 = 0 \quad \text{المعادلة (1) تكافئ :}$$

$$x^2(x + t^2 x - t^2) = 0 \quad \text{تكافئ :}$$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{أو} \\ x + t^2 x - t^2 = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ :}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x(1 + t^2) = t^2 \end{cases} \quad \text{تكافئ :}$$

$$\text{الحلين مقبولين لأنهما ينتميان إلى المجال } [0; 1[ \quad \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{تكافئ :}$$

$$\text{نتيجة : (d) يقطع } (\gamma) \text{ في نقطتين هما } O(0; 0) \text{ و } M'\left(\frac{t^2}{1+t^2}; \frac{t^3}{1+t^2}\right)$$

## تمارين نماذج للبكالوريا

### التمرين 1 -

$(O; \vec{I}; \vec{J})$  معلم متعامد و متجانس للمستوي .

نعتبر الدالة  $u$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$  و  $(C)$  منحناها البياني في المعلم  $(O; \vec{I}; \vec{J})$

- 1 - عين نهاية الدالة  $u$  عند  $-\infty$
- 2 - بين أن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :  $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$
- 3 - استنتج نهاية الدالة  $u$  عند  $+\infty$
- 4 - بين أن  $[u(x) + 2x]$  تؤول إلى 0 عندما  $x$  يؤول إلى  $-\infty$  - ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة .
- 5 - بين أن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $u(x) > 0$
- 6 - استنتج إشارة  $[u(x) + 2x]$  ثم فسر النتائج هندسيا .
- 7 - نقبل ان الدالة  $u$  متناهية تماما على  $\mathbb{R}$  . أرسم المنحنى  $(C)$  ومستقيمه المقارب المائل .

### الحل 1 -

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = +\infty \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \quad \text{لأن}$$

$$u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \quad \text{2 - من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا}$$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{x^2 + 1} - x) \times \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \end{aligned}$$

$$\text{و هو المطلوب .} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = +\infty \quad \text{لأن} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [u(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x + 2x \quad -4$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \quad \text{لأن} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{u(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty \quad \text{لأن} \cdot = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [u(x) - (-2x)] = 0 \quad \text{أي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [u(x) + 2x] = 0 \quad \text{التفسير الهندسي :}$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = -2x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C)$  بجوار  $-\infty$

5 - لندرس إشارة  $u(x)$  على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$u(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > x \quad \dots (1)$$

نميز حالتين :

الأولى :  $x < 0$  في هذا الحالة المتراجحة (1) دائما محققة .

الثانية :  $x \geq 0$  في هذه الحالة المتراجحة (1) تكافئ  $x^2 + 1 > x^2$

تكافئ  $1 > 0$  وهذا محقق دائما .

نتيجة : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن  $u(x) > 0$

6 - لدينا :  $u(x) + 2x = \sqrt{x^2 + 1} - x + 2x$

$= \sqrt{x^2 + 1} + x$

$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$  لأن  $\frac{1}{u(x)}$

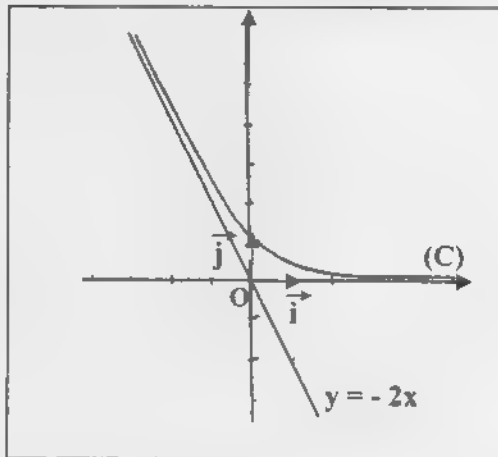
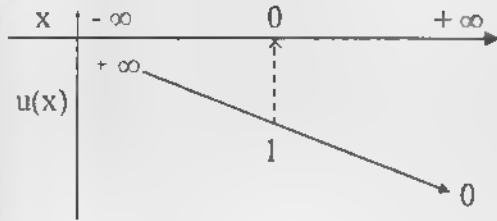
إذن : إشارة  $u(x) + 2x$  هي إشارة  $\frac{1}{u(x)}$  أي موجب تماما لأن  $u(x) > 0$

التفسير الهندسي :  $\{u(x) + 2x\} > 0$  تكافئ  $u(x) - (-2x) > 0$

أي المنحنى (C) يقع فوق المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة  $y = -2x$

7 - الإنشاء : علما أن الدالة  $u$  متناقصة على  $\mathbb{R}$  نحصل على جدول

التغيرات التالي :



منه المنحنى التالي :

## التمرين 2

ABCD مربع ضلعه 1 .

(C) هو ربع الدائرة ذات المركز A ونصف القطر [AB] المرسوم داخل المربع .

T نقطة من (C) تختلف عن B و D مماس الدائرة (C) عند النقطة T يقطع [DC]

في النقطة M و يقطع [BC] في النقطة N .

نضع  $DM = x$  و  $BN = y$

1 - برهن أن  $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$  .....

2 - برهن أن  $MN = x + y$  .....

3 - استنتج عبارة  $y$  بدلالة  $x$

$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$  لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $[-1; 0]$  -

4 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  .

5 - ما هي وضعية النقطة M التي من أجلها تكون المسافة MN أصغر ما يمكن ؟

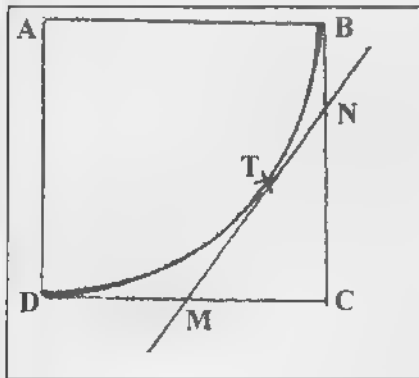
## الحل 2

1 - بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث MNC القائم في C نحصل على :

$MN^2 = MC^2 + NC^2$  (1) .....

لكن لدينا :  $\left. \begin{array}{l} NC = BC - BN \\ MC = DC - DM \end{array} \right\}$

أي :  $\left. \begin{array}{l} NC = 1 - y \\ MC = 1 - x \end{array} \right\}$  لأن  $\left. \begin{array}{l} BC = DC = 1 \\ DM = x \text{ و } BN = y \end{array} \right\}$



إذن المساواة (1) تصبح :

$$MN^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2$$

$$MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$$

أي :  $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$  و هو المطلوب .

2 - حسب الشكل لدينا :  $MN = MT + TN$  ..... (2) و المماس (MN) عمودي على (AT)

لنبحث عن كل من MT و TN :

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ATN القائم في T نحصل على :

$$AN^2 = AT^2 + TN^2 \quad \text{أي} \quad AN^2 = 1 + TN^2 \quad \dots\dots (\alpha)$$

لأن : AT هو نصف قطر الدائرة (C) أي  $AT = 1$

من جهة أخرى بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ABN القائم في B فإن :

$$AN^2 = AB^2 + BN^2 \quad \text{أي} \quad AN^2 = 1 + y^2 \quad \dots\dots (\beta)$$

بمقارنة العلاقتين  $(\alpha)$  و  $(\beta)$  نحصل على :

$$1 + TN^2 = 1 + y^2$$

$$TN^2 = y^2$$

$$TN = y \quad \text{منه} \quad \dots\dots (3)$$

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ATM القائم في T نحصل على :

$$AM^2 = AT^2 + MT^2 \quad \text{أي} \quad AM^2 = 1 + MT^2 \quad \dots\dots (\gamma)$$

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث AMD القائم في D نحصل على :

$$AM^2 = AD^2 + DM^2 \quad \text{أي} \quad AM^2 = 1 + x^2 \quad \dots\dots (\lambda)$$

بمقارنة العلاقتين  $(\gamma)$  و  $(\lambda)$  نحصل على :

$$1 + MT^2 = 1 + x^2$$

$$MT^2 = x^2$$

$$MT = x \quad \text{أي} \quad \dots\dots (4)$$

بتعويض كل من MT و TN في العلاقة (2) نحصل على :

$$MN = x + y \quad \text{و هو المطلوب .}$$

3 - لدينا :

$$\left. \begin{aligned} MN^2 &= x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \\ MN &= x + y \end{aligned} \right\}$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \quad \text{أي} :$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \quad \text{أي} :$$

$$2xy = -2x - 2y + 2 \quad \text{أي} :$$

$$2xy + 2y = 2 - 2x \quad \text{أي} :$$

$$2y(x + 1) = 2(1 - x) \quad \text{أي} :$$

$$y = \frac{1 - x}{1 + x} \quad \text{حيث} \quad 1 + x \neq 0 \quad \text{لأن} \quad 0 < x < 1 \quad \text{أي} :$$

وهي عبارة y بدلالة x.

4 - تغيرات الدالة f على  $[-1; 1]$  :

f دالة ناطقة إذن معرفة وقابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها  $\{-1\} - IR$  وخاصة على المجال  $[-1; 1]$

و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - (1+x^2)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{2x + 2x^2 - 1 - x^2}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2} \quad \text{من إشارة} \quad x^2 + 2x - 1 \quad \text{لأن المقام موجب}$$

إشارة  $x^2 + 2x - 1$  :

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$



منه :

$x$	$-1-\sqrt{2}$	$0$	$\sqrt{2}-1$	$1$
$x^2+2x-1$	$+$	$0$	$-$	$+$

إذن : إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]0; 1[$  كما يلي :

$x$	$0$	$\sqrt{2}-1$	$1$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $]0; 1[$  :

$x$	$0$	$\sqrt{2}-1$	$1$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$1$	$2\sqrt{2}-2$	$1$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

$$f(\sqrt{2}-1) = \frac{2-2\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-2$$

$$y = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{و} \quad MN = x + y \quad : \text{ 5 - لدينا}$$

$$MN = x + \frac{1-x}{1+x} \quad : \text{ أي}$$

$$MN = \frac{x+x^2+1-x}{1+x} \quad : \text{ أي}$$

$$MN = \frac{x^2+1}{x+1} \quad : \text{ أي}$$

$$MN = f(x) \quad : \text{ أي}$$

نتيجة : تكون المسافة  $MN$  أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كانت  $f(x)$  قيمة حدية صغرى على المجال  $]0; 1[$  و حسب جدول التغيرات فإن هذا محقق من أجل  $x = \sqrt{2}-1$  وعليه تكون المسافة  $MN$  أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كانت المسافة بين النقطة  $D$  و النقطة  $M$  هي  $\sqrt{2}-1$  أي  $x = \sqrt{2}-1$

### التمرين 3

لتكن  $f_m$  دالة معرفة بـ  $f_m(x) = \frac{x^2 - m x - 15}{x^2 - m x - 3}$  حيث  $m$  وسيط حقيقي غير معدوم .

- 1 - ادرس تغيرات الدالة  $f_m$  .
- 2 - استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(C_m)$  الممثل للدالة  $f_m$  .
- 3 - بين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات  $(C_m)$  .
- 4 - ما هو المنحنى الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيات  $(4; 1)$  .

### الحل 3

1 - دراسة تغيرات الدالة  $f_m$  :

$$f_m \text{ معرفة من أجل : } x^2 - m x - 3 \neq 0$$

$$\Delta = m^2 + 12 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2} \\ x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2} \end{cases}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{-2\sqrt{m^2 + 12}}{2} < 0 \quad \text{لأن} \quad x_1 < x_2 \quad \text{فإن} \quad \text{من} \quad \mathbb{R} \quad n \quad \text{لا حظ أن من أجل كل} \quad n \quad \text{من} \quad \mathbb{R}$$

إذن : معرفة  $f_m$  على  $]-\infty ; x_1[ \cup ]x_1 ; x_2[ \cup ]x_2 ; +\infty[$

لاحظ أن :  $f_m(x) = \frac{x^2 - m x - 3 - 12}{x^2 - m x - 3} = 1 - \frac{12}{x^2 - m x - 3}$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow x_1^-} f_m(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} 1 - \frac{12}{y} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow x_1^+} f_m(x) = \lim_{y \rightarrow 0^-} 1 - \frac{12}{y} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow x_2^-} f_m(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} 1 - \frac{12}{y} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow x_2^+} f_m(x) = \lim_{y \rightarrow 0^-} 1 - \frac{12}{y} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = 1$

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$x^2 - m x - 3$	+	0	0	+

$f_m$  دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'_m(x) &= \frac{(2x - m)(x^2 - m x - 3) - (2x - m)(x^2 - m x - 15)}{(x^2 - m x - 3)^2} \\ &= \frac{2x - m}{(x^2 - m x - 3)^2} \times (x^2 - m x - 3 - x^2 + m x + 15) \\ &= \frac{12(2x - m)}{(x^2 - m x - 3)^2} \end{aligned}$$

إذن : إشارة  $f'_m(x)$  هي إشارة  $2x - m$  لأن المقام موجب .

x	$-\infty$	$x_1$	$m/2$	$x_2$	$+\infty$
$2x - m$	-	-	0	+	+

منه جدول تغيرات الدالة  $f_m$  :

x	$-\infty$	$\frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$	$\frac{m}{2}$	$\frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	1	$-\infty$	$f_m(m/2)$	$+\infty$	1

$$f_m\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{\frac{m^2}{4} - m\left(\frac{m}{2}\right) - 15}{\frac{m^2}{4} - m\left(\frac{m}{2}\right) - 3} = \frac{\frac{m^2 - 2m^2 - 60}{4}}{\frac{m^2 - 2m^2 - 12}{4}} = \frac{m^2 - 2m^2 - 60}{m^2 - 2m^2 - 12}$$

2 - من جدول تغيرات الدالة  $f_m$  نستنتج معادلات المستقيمات المقاربة كما يلي :

المستقيم ذو المعادلة  $x = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$  مقارب عمودي .

المستقيم ذو المعادلة  $x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}$  مقارب عمودي .

المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب أفقي بجوار  $-\infty$  و  $+\infty$  .

3 - لتكن  $M(\alpha ; \beta)$  نقطة من المستوى .

تكون  $M$  تنتمي إلى كل للمنحنيات  $(C_m)$  إذا و فقط إذا تحقق أن :

من أجل كل  $m$  من  $\mathbb{R}$  فإن :  $f_m(\alpha) = \beta$

أي من أجل كل  $m$  من  $\mathbb{R}$  :  $\frac{\alpha^2 - m \alpha - 15}{\alpha^2 - m \alpha - 3} = \beta$

أي من أجل كل  $m$  من  $IR$  :  $\alpha^2 - m\alpha - 15 \quad \beta(\alpha^2 - m\alpha - 3)$

أي من أجل كل  $m$  من  $IR$  :  $\alpha^2 - \beta\alpha^2 - 15 + 3\beta + m(\alpha\beta - \alpha) = 0$

أي بالمطابقة : (1)  $\alpha^2 - \beta\alpha^2 - 15 + 3\beta = 0$  .....  
(2)  $\alpha\beta - \alpha = 0$  .....

المعادلة (2) تكافئ  $\alpha(\beta - 1) = 0$  أي  $\alpha = 0$  أو  $\beta = 1$

✓ من أجل  $\alpha = 0$  المعادلة (1) تصبح :  $-15 + 3\beta = 0$  أي  $\beta = 5$

✓ من أجل  $\beta = 1$  المعادلة (1) تصبح :  $-15 + 3 = 0$  مستحيل .

نتيجة :  $\alpha = 0$  و  $\beta = 5$

خلاصة : توجد نقطة وحيدة  $M$  إحداثياتها  $M(0; 5)$  تنتمي إلى كل المنحنيات  $(C_m)$  . (من أجل أي قيمة لـ  $m$ ) .

4 - تكون النقطة ذات الإحداثيات  $(4; 1)$  تنتمي إلى المنحنى  $(C_m)$  إذا و فقط إذا كان  $f_m(4) = 1$

أي :  $\frac{16 - 4m - 15}{16 - 4m - 3} = 1 \Leftrightarrow 16 - 4m - 15 = 16 - 4m - 3$   
 $\Leftrightarrow -15 = -3$  مستحيل

إذن : لا يوجد أي منحنى يشمل النقطة ذات الإحداثيات  $(4; 1)$

ملاحظة : يمكن الإجابة على هذا السؤال بملاحظة جدول تغيرات الدالة  $f_m$

حيث  $f_m(x)$  لا يأخذ أبدا القيمة 1 مهما كان العدد الحقيقي  $m$  .

### التمرين 3

نضع كرة ذات نصف القطر  $R$  داخل مخروط دوراني قياس نصف زاوية رأسه هي  $\theta$  حيث  $0 < \theta < \pi/2$

نفرض أن الكرة و المخروط الدوراني متماسان و نقبل أن حجمه  $v$  يحقق العلاقة :

$$v = \frac{\pi R^3 (1 + \sin \theta)^2}{3 \sin \theta (1 - \sin \theta)}$$

1 - برهن أن الارتفاع  $h$  و الحجم  $v$  للمخروط الدوراني يحققان العلاقة :

$$v = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \theta$$

2 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  المعرفة على  $]0; 1[$   $\rightarrow f(x) = \frac{(1+x)^2}{x(1-x)}$

3 - استنتج أنه يوجد مخروط دوراني له أصغر حجم ممكن نرمز له بـ  $v_0$  من أجل قياس نصف زاوية رأسه  $\theta_0$  يطلب

تعيين كل من  $\theta_0$  و  $v_0$  .

4 - أحسب الارتفاع  $h_0$  للمخروط الدوراني الذي له أصغر حجم .

### الحل 3

1 - لدينا  $v = \frac{1}{3} Sh$  حيث  $\left. \begin{array}{l} S : \text{مساحة قاعدة المخروط الدوراني} \\ h : \text{ارتفاع المخروط الدوراني} \end{array} \right\}$

و حسب الشكل فإن :  $S = \pi AB^2$  حيث  $[AB]$  هو نصف قطر قاعدة المخروط .

من جهة أخرى لدينا :  $\tan \theta = \frac{AB}{h}$  لأن المثلث  $OAB$  قائم في  $A$

$$AB = h \tan \theta$$

$$S = \pi h^2 \tan^2 \theta \quad \text{أي} \quad S = \pi (h \tan \theta)^2$$

$$v = \frac{1}{3} (\pi h^2 \tan^2 \theta) \times h \quad \text{إذن :}$$

$$v = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \theta \quad \text{أي : و هو المطلوب .}$$

2 - تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0; 1[$

$f$  دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها وخاصة على  $]0; 1[$  و دالتها المشتقة

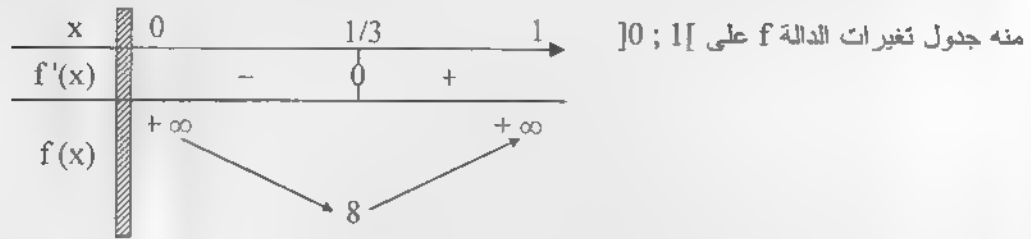
$$f'(x) = \frac{2(1+x)x(1-x) - (1-2x)(1+x)^2}{[x(1-x)]^2}$$

$$= (1+x) \times \frac{2x-2x^2-(1+x)(2x-2x^2)}{[x(1-x)]^2}$$

$$= (1+x) \times \frac{3x-1}{[x(1-x)]^2}$$

إن إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $(1+x)(3x-1)$  لأن المقام موجب

x	$-\infty$	-1	$1/3$	$+\infty$
$1+x$	-	0	+	+
$3x-1$	-	-	0	+
$(1+x)(3x-1)$	+	0	-	+



3 — لاحظ أن الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية صغرى محلية على المجال  $]0; 1[$  و هي من أجل  $x = 1/3$

إذا وضعنا  $x = \sin \theta$  نفضل على  $v = \frac{\pi R^3}{3} \times \frac{(1+x)^2}{x(1-x)}$  حيث  $0 < x < 1$  لأن  $0 < \theta < \pi/2$

$$v = \frac{\pi R^3}{3} f(x) \quad \text{أي}$$

منه : يكون  $v$  أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان  $f(x)$  أصغر ما يمكن

و حسب تغيرات الدالة  $f$  فإن هذا محقق من أجل  $x = 1/3$

أي :  $\sin \theta = 1/3$  إذن  $\theta_0$  هي الزاوية التي تحقق  $\left. \begin{array}{l} 0 < \theta_0 < \pi/2 \\ \sin \theta_0 = 1/3 \end{array} \right\}$

وفي هذه الحالة لدينا  $v_0 = \frac{\pi R^3}{3} f(1/3)$  أي  $v_0 = \frac{8}{3} \pi R^3$

4 — حسب العلاقة  $v = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \theta$  فإن :  $v_0 = \frac{\pi h_0^3}{3} \tan^2 \theta_0$

$$\frac{8 \pi R^3}{3} = \frac{\pi h_0^3}{3} \tan^2 \theta_0 \quad \text{أي :}$$

$$8 R^3 = h_0^3 \tan^2 \theta_0 \quad \text{أي :}$$

$$(1) \dots \dots h_0^3 = \frac{8 R^3}{\tan^2 \theta_0} \quad \text{أي :}$$

لكن  $\sin \theta_0 = 1/3$  إذن :  $\sin^2 \theta_0 = 1/9$

و لدينا :  $\cos^2 \theta_0 = 1 - \sin^2 \theta_0$  أي  $\cos^2 \theta_0 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

إذن :  $\tan^2 \theta_0 = \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_0} = \frac{1/9}{8/9} = \frac{1}{8}$  أي  $\tan^2 \theta_0 = \frac{1}{8}$

منه العلاقة (1) تصبح :

$$h_0^3 = 64 R^3 \quad \text{أي :} \quad h_0 = \frac{8 R^3}{1/8}$$

$$h_0^3 = (4 R)^3 \quad \text{أي :}$$

منه :  $h_0 = 4 R$  و هو المطلوب .

## التمرين 5 -

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر النقطة  $p$  ذات الإحداثيات  $(2; 1)$ (d) مستقيم يشمل  $p$  ويقطع كل من  $(ox)$  و  $(oy)$  في النقطتين  $A$  و  $B$  على الترتيب حيث ترتيب النقطة  $B$  يكون أكبر من 1نضع  $\theta$  القياس بالراديان للزاوية  $\widehat{OAB}$  حيث  $0 < \theta < \pi/2$ 1 - أحسب بدلالة  $\tan \theta$  كل من فاصلة النقطة  $A$  و ترتيب النقطة  $B$ 2 - استنتج عبارة مساحة المثلث  $OAB$  بدلالة  $\tan \theta$ لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $]0; +\infty[$   $f(x) = (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x)$ 3 - أدرس تغيرات الدالة  $f$ 4 - استنتج أصغر مساحة ممكنة للمثلث  $OAB$ 

## الحل - 5

1 - لتكن  $x$  فاصلة النقطة  $A$  و  $y$  ترتيب النقطة  $B$ .

$$\begin{aligned} \text{حسب الشكل لدينا : } \tan \theta &= \frac{1}{x-2} \quad \text{منه :} \\ (x-2) \tan \theta &= 1 \\ x \tan \theta &= 1 + 2 \tan \theta \quad \text{أي :} \end{aligned}$$

$$\text{أي : } x = \frac{1}{\tan \theta} + 2 \quad \text{و هو المطلوب .}$$

$$\begin{aligned} \text{حسب الشكل دائما : } \tan \theta &= \frac{y-1}{2} \quad \text{منه :} \\ 2 \tan \theta &= y-1 \\ y &= 1 + 2 \tan \theta \quad \text{و هو المطلوب .} \end{aligned}$$

$$2 - \text{مساحة المثلث } OAB : S = \frac{1}{2} x y \quad \text{أي } S = \frac{1}{2} (2 + \frac{1}{\tan \theta})(1 + 2 \tan \theta)$$

3 - تغيرات الدالة  $f$  $f$  قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها وخاصة على  $]0; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} (1 + 2x) + 2(2 + \frac{1}{x}) \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 4 + \frac{2}{x} \\ &= 4 - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{4x^2 - 1}{x^2} \quad \text{من إشارة } 4x^2 - 1 \quad \text{لأن المقام موجب .}$$

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/2$	$+\infty$	
$4x^2 - 1$	+	0	-	0	+

جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $]0; +\infty[$  :

$x$	0	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	8	$+\infty$

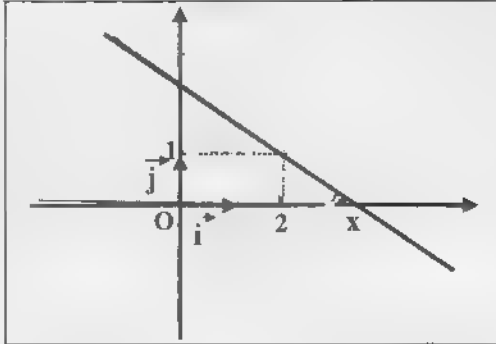
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x) = +\infty$$

$$f(1/2) = (2 + 2)(1 + 1) = 8$$

4 - حسب السؤال (2) لدينا مساحة المثلث OAB هي  $S = \frac{1}{2} (2 + \frac{1}{\tan \theta}) (1 + 2 \tan \theta)$

نضع  $\tan \theta = x$  حيث  $0 < \theta < \pi/2$  إذن  $\tan \theta > 0$  أي  $x \in ]0; +\infty[$



منه : عبارة المساحة S تصبح :  $S = \frac{1}{2} (2 + \frac{1}{x}) (1 + 2x)$  حيث  $x = \tan \theta$

أي :  $S = \frac{1}{2} f(x)$

نتيجة : بما أن الدالة f تقبل قيمة حدية محلية صغرى على

المجال  $]0; +\infty[$  و هي 8 من أجل  $x = 1/2$  فإن المساحة

تكون أصغر ما يمكن من أجل  $x = 1/2$  و  $f(x) = 8$

أي  $S = 1/2 \times 8$  أي  $S = 4$

ولدينا  $x = 1/2$  أي  $\tan \theta = 1/2$  و  $0 < \theta < \pi/2$

### التمرين 6 -

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A(-1; 0) حيث ترتيب و فاصلة النقطة

B موجبين معا و النقط A , B , C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 1 .

نسمي H المسقط العمودي للنقطة B على محور الفواصل .

ليكن  $\alpha$  قياسا رئيسيا موجبا بالراديان للزاوية  $(\vec{i}; \vec{OB})$

1 - عين احداثيات النقطة B .

2 - عبر عن المسافتين BH و AH بدلالة  $\alpha$

3 - استنتج عبارة مساحة المثلث ABC بدلالة  $\alpha$

نعتبر الدالة f المعرفة على  $[0; \pi]$  بـ  $f(x) = \sin x - \cos x$

4 - برهن أن من أجل كل x من  $[0; \pi]$  :  $f'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$

5 - استنتج أن من أجل كل x من  $[0; \pi]$  :  $f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$

6 - ادرس إشارة  $f'(x)$  ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f على  $[0; \pi]$

7 - برهن أنه توجد قيمة للعدد  $\alpha$  التي من أجلها تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن المطلوب تحديدها .

### الحل - 6

1 - بما أن نصف قطر الدائرة هو 1 فإن يمكن اعتبارها دائرة متثلثة .

و عليه فاصلة النقطة B هو  $\cos \alpha$  و ترتيبها هو  $\sin \alpha$  لأن النقطة B تنتمي إلى الدائرة المتثلثة أي  $B(\cos \alpha; \sin \alpha)$

2 - حسب الشكل لدينا  $AH = 1 + OH$  منه  $AH = 1 + \cos \alpha$

و BH هو ترتيب النقطة B أي  $BH = \sin \alpha$

3 - لاحظ أن مساحة المثلث ABC هي ضعف مساحة المثلث AHB

مساحة المثلث AHB هي :  $\frac{1}{2} AH \times HB$  (قائم الزاوية في H)

أي : مساحة المثلث ABC هي :  $S = 2 \times (\frac{1}{2} AH \times HB)$

أي :  $S = AH \times HB$

منه :  $S = \sin \alpha (1 + \cos \alpha)$  و هو المطلوب

4 - الدالة f قابلة للاشتقاق على  $IR$  و خاصة على  $[0; \pi]$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \cos x (1 + \cos x) - \sin x \times \sin x$$

$$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\text{لأن } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$\cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x + \cos x - 1 \quad \text{وهو المطلوب}$$

5 — لدينا من أجل كل  $x$  من  $[0 ; \pi]$  :  $f'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$  ..... (1)  
 $= (\cos^2 x + \cos x) + (\cos^2 x - 1)$   
 $= \cos x (1 + \cos x) + (\cos x + 1)(\cos x - 1)$   
 $= (\cos x + 1)(\cos x + \cos x - 1)$   
وهو المطلوب  $= (\cos x + 1)(2 \cos x - 1)$

6 — لاحظ أن إشارة  $f'(x)$  على المجال  $[0 ; \pi]$  هي إشارة  $(\cos x + 1)(2 \cos x - 1)$   
كما يلي :  $\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -1$  وهذا محقق دائما .  
 $2 \cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \cos x \geq 1$   
 $\Leftrightarrow \cos x \geq 1/2$   
 $\Leftrightarrow x \in [0 ; \pi/3]$

x	0	$\pi/3$	$\pi$
$\cos x + 1$		+	0
$2 \cos x - 1$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

منه إشارة  $f'(x)$  على  $[0 ; \pi]$  كما يلي :

x	0	$\pi/3$	$\pi$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $[0 ; \pi]$  :

$$f(0) = \sin 0(1 + \cos 0) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} (1 + \cos \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f(\pi) = \sin \pi (1 + \cos \pi) = 0$$

7 — حسب السؤال (3) لدينا مساحة المثلث ABC هي :  $S = \sin \alpha (1 + \cos \alpha)$

بوضع  $x = \alpha$  نحصل على  $S = \sin x (1 + \cos x)$  مع  $0 < x < \pi$

$$S = f(x) \quad \text{أي :}$$

و حسب السؤال (6) فإن الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية عظمى محلية على المجال  $]0 ; \pi[$  قيمتها  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  وذلك من أجل  $x = \pi/3$

إذن : مساحة المثلث ABC تكون أكبر ما يمكن من أجل  $\alpha = \pi/3$  و تقدر في هذه الحالة بـ  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

التمرين 7

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} - \{-2\} : f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)}$$

نسمي (C) منحناها في المستوى المنسوب إلى معامد و متجانس  $(\vec{O} ; \vec{I} ; \vec{J})$ .

1 — برهن أن يوجد عدداً حقيقين  $a$  و  $b$  حيث من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-2\}$  :

$$f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2}$$

2 — أدرس نهايات الدالة  $f$  عند حدود مجموعة تعريفها .

3 — أنشئ جدول تغيرات الدالة  $f$  .

نسمي  $(\gamma)$  القطع المكافئ ذو المعادلة  $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$  حيث  $x \neq -2$

P و M نقطتان من  $(\gamma)$  و (C) على الترتيب لهما نفس الفاصلة  $x$

4 — عين مركبتي الشعاع  $\overrightarrow{PM}$

5 — استنتج أن لما  $x$  يؤول إلى  $(-\infty)$  أو  $(+\infty)$  فإن المسافة PM تؤول إلى 0 ثم فسر هندسيا هذه النتيجة .

6 — أرسم كل من  $(\gamma)$  و (C)

## الحل - 7

$$\begin{aligned}
 a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2} &= \frac{(ax^2 - 2ax + a)(x+2) + b}{x+2} : \text{ ليكن } x \in \mathbb{R} - \{-2\} \text{ لدينا} \\
 &= \frac{ax^3 + 2ax^2 - 2ax^2 - 4ax + ax + 2a + b}{x+2} \\
 &= \frac{ax^3 - 3ax + 2a + b}{x+2} \\
 &= \frac{2(ax^3 - 3ax + 2a + b)}{2(x+2)} \\
 &= \frac{2ax^3 - 6ax + 4a + 2b}{2(x+2)}
 \end{aligned}$$

نتيجة : يكون  $f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2}$  من أجل كل  $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\begin{cases} a = 1/2 \\ a = 1/2 \\ 2b = -6 - 4a \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} 2a = 1 \\ 6a = 3 \\ 4a + 2b = -6 \end{cases} \text{ إذا فقط إذا كان :}$$

$$\begin{cases} a = 1/2 \\ 2b = -6 - 2 \end{cases} \text{ أي :}$$

$$\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -4 \end{cases} \text{ أي :}$$

أخيرا : من أجل كل  $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$  فإن :  $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2} = +\infty \quad \text{2 - النهايات :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{2}(-2-1)^2 - \frac{4}{x+2} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{9}{2} - \frac{4}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{2}(-2-1)^2 - \frac{4}{x+2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{9}{2} - \frac{4}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2} = +\infty$$

3 - التغيرات : الدالة  $f$  ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(3x^2 - 3)(2x + 4) - 2(x^3 - 3x - 6)}{[2(x+2)]^2} \\
 &= \frac{6x^3 + 12x^2 - 6x - 12 - 2x^3 + 6x + 12}{4(x+2)^2} \\
 &= \frac{4x^3 + 12x^2}{4(x+2)^2} \\
 &= \frac{4x^2(x+3)}{4(x+2)^2} \\
 &= \frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}
 \end{aligned}$$

إذن : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $x^2(x+3)$  لأن المقام موجب كمايلي :

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$0$	$+\infty$
$x^2$		+	+	0	+
$x+3$	-	0	-	+	+
$x^2(x+3)$	-	0	+	0	+



منه إشارة $f'(x)$ على $D_f$ :					
$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	+

إن جدول تغيرات الدالة $f$ كما يلي :					
$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	$+\infty$	$12$	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$

$$f(-3) = \frac{-27 + 9 - 6}{-2} = 12$$

$$f(0) = -6/4 = -3/2$$

4 -  $P \in (C)$  إذن : احداثيات  $P$  هي  $(x; f(x))$  أي :  $P(x; \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2})$  حيث  $x \neq -2$

$M \in (\gamma)$  إذن : احداثيات  $M$  هي  $M(x; \frac{1}{2}(x-1))$  حيث  $x \neq -2$

$$\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} x-x \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 - [\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2}] \end{pmatrix} \quad \text{منه}$$

$$\text{أي : } \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{x+2} \end{pmatrix} \quad \text{مع } x \neq -2$$

5 - لما  $x$  يؤول إلى  $-\infty$  أو  $+\infty$  لدينا  $\frac{4}{x+2}$  يؤول إلى 0 منه مركبات الشعاع  $\overrightarrow{PM}$  هي  $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$  حيث  $\alpha$  يؤول إلى 0

و عليه  $PM = \sqrt{0 + \alpha^2}$  أي  $PM = \alpha$  مع  $\alpha$  يؤول إلى 0

إذن : لما  $x$  يؤول إلى  $+\infty$  أو  $-\infty$  فإن المسافة  $PM$  تؤول إلى 0

أي : كلما اقترب العدد : من  $+\infty$  أو  $-\infty$  فإن النقطة  $P$  تقترب أكثر فأكثر من النقطة  $M$  لأن المسافة بينهما تقترب من 0 و هندسياً فإن المنحنى  $(C)$  يقترب من المنحنى  $(\gamma)$  لما  $x$  يقترب من  $+\infty$  أو  $-\infty$ .

6 - الإنشاء : لإنشاء المنحنيس  $(C)$  و  $(\gamma)$  ندرس الوضعية النسبية لـ  $(C)$  بالنسبة إلى  $(\gamma)$  كما يلي :

$$f(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2} - \frac{1}{2}(x-1)^2 = \frac{-4}{x+2}$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$\frac{-4}{x+2}$	-	+	-

لما  $x \in ]-\infty; -2[$   $(C)$  فوق  $(\gamma)$

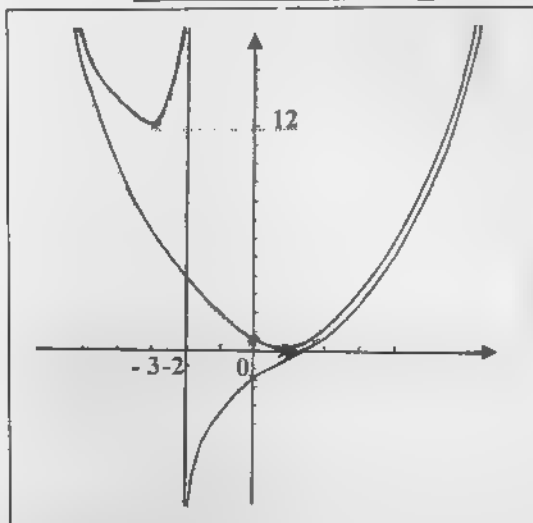
لما  $x \in ]-2; +\infty[$   $(C)$  تحت  $(\gamma)$

لندرس تغيرات الدالة  $g : x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^2$

$$g'(x) = x - 1$$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

منه الإنشاء كما يلي :



## التمرين - 8

$\lambda$  عدد حقيقي موجب تماما .  $f_\lambda$  دالة معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ  $I = ]0; +\infty[$   $f_\lambda(x) = x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3}$  و  $(C_\lambda)$  منحناها في معلم .

- 1 - أدرس نهايتي الدالة  $f_\lambda$  على حدود المجال  $I$  .
- 2 - برهن أن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_\lambda)$  يطلب معادلته ووضعيته النسبية بالنسبة إلى المنحنى  $(C_\lambda)$  .
- 3 - أدرس تغيرات الدالة  $f_\lambda$  على المجال  $I$  .
- 4 - برهن أن الدالة  $f_\lambda$  تقبل قيمة حدية تبلغها عند عدد حقيقي  $x_\lambda$  .
- 5 - برهن أن مجموعة النقطة  $P_\lambda$  محتواة في المستقيم ذو المعادلة  $y = \frac{16}{9}x$

## الحل - 8

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\lambda}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^2}{x^3} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} = +\infty \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2}{x^3} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} = +\infty$$

$$\begin{aligned} -2 \text{ لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f_\lambda(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} \end{aligned}$$

$$= 0 \quad \text{إذن المستقيم ذو المعادلة } y = x \text{ مقارب مائل للمنحنى } (C_\lambda) \text{ في جوار } +\infty$$

الوضعية النسبية لـ  $(C_\lambda)$  و المستقيم المقارب المائل :

$$f_\lambda(x) - x = \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} \quad \text{بما أن } \lambda > 0 \text{ و } x \in ]0; +\infty[$$

$$\text{فإن : } \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} > 0$$

أي : المنحنى  $(C_\lambda)$  يقع دائما فوق المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة  $y = x$  التغيرات :

$f_\lambda$  دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها خاصة على المجال  $]0; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'_\lambda(x) &= 1 + \frac{-2\lambda}{x^2} + \frac{-3\lambda^2 x^2}{x^6} \\ &= 1 + \frac{-2\lambda}{x^2} + \frac{-3\lambda^2}{x^4} \\ &= \frac{x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2}{x^4} \end{aligned}$$

إذن إشارة  $f'_\lambda(x)$  هي إشارة  $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2$  لأن المقام موجب لندرس إذن إشارة  $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2$  كمايلي :  
نضع  $\alpha = x^2$  حيث  $\alpha \geq 0$

إذن : ندرس إشارة كثير الحدود  $\alpha^2 - 2\lambda\alpha - 3\lambda^2$  ذات المجهول  $\alpha$  الموجب .

$$\Delta = 4\lambda^2 + 12\lambda^2 = 16\lambda^2 = (4\lambda)^2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2\lambda - 4\lambda}{2} = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda \\ \alpha_2 = \frac{2\lambda + 4\lambda}{2} = \frac{6\lambda}{2} = 3\lambda \end{cases}$$

نتيجة :

$$\alpha^2 - 2\lambda\alpha - 3\lambda^2 = (\alpha + \lambda)(\alpha - 3\lambda)$$

$$x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2 = (x^2 + \lambda)(x^2 - 3\lambda) \quad \text{منه :}$$

إذن إشارة  $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2$  هي إشارة الجداء  $(x^2 + \lambda)(x^2 - 3\lambda)$  كما يلي :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3\lambda}$	0	$\sqrt{3\lambda}$	$+\infty$
$\lambda > 0$ مع $x^2 + \lambda$			+		
$x^2 - 3\lambda$	+	0	-	0	+
الجداء	+	0	-	0	+

منه جدول إشارة  $f'_\lambda(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :

x	0	$\sqrt{3\lambda}$	$+\infty$
$f'_\lambda(x)$	-	0	+

إذن : جدول تعبيرات الدالة  $f_\lambda$  كما يلي :

x	0	$\sqrt{3\lambda}$	$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		0	+
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	$f_\lambda(\sqrt{3\lambda})$	$+\infty$

$$f_\lambda(\sqrt{3\lambda}) = \sqrt{3\lambda} + \frac{2\lambda}{\sqrt{3\lambda}} + \frac{\lambda^2}{3\lambda\sqrt{3\lambda}} = \sqrt{3\lambda} + \sqrt{\frac{4}{3}\lambda} + \sqrt{\frac{1}{27}\lambda}$$

4 - حسب جدول التغيرات فإن الدالة  $f_\lambda$  تقبل قيمة حدية صغرى محلية هي  $f_\lambda(\sqrt{3\lambda})$  تلعبها عند  $x_\lambda = \sqrt{3\lambda}$

5 - لنكن  $(\gamma)$  مجموعة النقط  $P_\lambda$  ذات الفاصلة  $x_\lambda \neq 0$

$$P_\lambda(\sqrt{3\lambda}; \sqrt{3\lambda} + \sqrt{\frac{4}{3}\lambda} + \sqrt{\frac{1}{27}\lambda}) \quad \text{أي}$$

لاحظ أن من أجل كل  $\lambda$  موجب تماما فإن  $\sqrt{3\lambda} \neq 0$  إذن  $x_\lambda \neq 0$

منه :

$$\begin{aligned} \frac{y_\lambda}{x_\lambda} &= \frac{\sqrt{3\lambda} + \sqrt{\frac{4}{3}\lambda} + \sqrt{\frac{1}{27}\lambda}}{\sqrt{3\lambda}} \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{3\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3\lambda}} \\ &= 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{9+6+1}{9} \\ &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

$$y_\lambda = \frac{16}{9} x_\lambda \quad \text{منه} \quad \frac{y_\lambda}{x_\lambda} = \frac{16}{9} \quad \text{نتيجة :}$$

إذن : مجموعة النقط  $P_\lambda(x; y)$  حيث  $x = x_\lambda$  تحقق المعادلة  $y = \frac{16}{9}x$  من أجل  $x > 0$  لأن  $\sqrt{3\lambda} > 0$

إذن : المجموعة  $(\gamma)$  جزء محتواة في المستقيم ذو المعادلة  $y = \frac{16}{9}x$

### التمرين - 9

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  نسمي (C) منحناها في معلم .

- 1 - أدرس تغيرات الدالة  $f$ .
- 2 - عين الدالة المشتقة الثانية للدالة  $f$  ثم أدرس إشارتها.
- 3 - أكتب معادلة مماس المذني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .  
لتكن  $g$  الدالة المعرفة بـ  $g(x) = f(x) - x$
- 4 - بين أن يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $]1; 2[$  يحقق  $g(\alpha) = 0$  ثم استنتج عدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة  $y = x$
- 5 - لتكن  $(\gamma)$  مجموعة النقاط  $M(y; x)$  من المستوي حيث  $x \in \mathbb{R}$  و  $y = f(x)$   
أوجد طريقة هندسية لإنشاء مجموعة النقاط  $(\gamma)$  باستعمال المنحنى (C)
- 6 - أنشئ كل من (C) و  $(\gamma)$  في نفس المعلم.

الحل = 9

1 -  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  لأن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $x^2 + 1 > 0$ 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \quad \text{لأن } x < 0 \text{ إذن } |x| = -x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= 0 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \quad \text{لأن } x > 0 \text{ إذن } |x| = x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= 2 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

إذن :  $\left. \begin{array}{l} \text{المستقيم ذو المعادلة } y = 0 \text{ مقارب للمنحنى (C) في جوار } -\infty \\ \text{المستقيم ذو المعادلة } y = 2 \text{ مقارب للمنحنى (C) في جوار } +\infty \end{array} \right\}$   
الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \times x}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)		2

إذن :  $f'(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$   
منه : جدول تغيرات الدالة  $f$  كمايلي :

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

لدينا :

$$\sqrt{\alpha} = \alpha^{1/2} \quad \text{فإن} \quad \alpha > 0 \quad \text{لأن من أجل} \quad = \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 1)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

$$= (x^2 + 1)^{-3/2}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}(2x)(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}-1}$$

منه :

$$= -3x(x^2 + 1)^{-5/2}$$

$$= \frac{-3x}{(x^2 + 1)^{5/2}}$$

$$= \frac{-3x}{(x^2 + 1)^2 \times \sqrt{x^2 + 1}}$$

منه : إشارة  $f''(x)$  هي إشارة  $-3x$  لأن  $(x^2 + 1)^2 \sqrt{x^2 + 1} > 0$  كمايلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
-3x		+	-

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''(x)		+	-

نتيجة : إشارة  $f''(x)$  على  $\mathbb{R}$  :

3 — معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل :  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{1\sqrt{1}} = 1$$

حيث

منه المعادلة هي :  $y = x + 1$

4 — لتكن  $g$  الدالة المعرفة بـ  $g(x) = f(x) - x$

الدالة  $g$  هي مجموع الدالتين  $x \mapsto -x$  و  $x \mapsto f(x)$  المستمرتين على  $\mathbb{R}$

إذن :  $g$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  وخاصة على  $]1; 2[$

$$g(1) = f(1) - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+1}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$$

$$g(2) = f(2) - 2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{4+1}} - 2 = -1 + \frac{2}{\sqrt{5}} < 0$$

نتيجة :  $g$  مستمرة على  $]1; 2[$

$$g(1) \times g(2) < 0$$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد  $\alpha$  من المجال  $]1; 2[$  حيث  $g(\alpha) = 0$

هل  $\alpha$  وحيد ؟

لندرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على المجال  $]1; 2[$

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

$$\frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} - 1$$

لاحظ أن :  $\left. \begin{array}{l} x^2 + 1 > 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} > 1 \end{array} \right\}$

$$(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} > 1 \quad \text{اذن :}$$

$$\frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} < 1 \quad \text{اي :}$$

$$\frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} - 1 < 0 \quad \text{منه :}$$

$$g'(x) < 0 \quad \text{اي :}$$

منه :  $g$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$  و خاصة على  $]1; 2[$

إذن : العدد  $\alpha$  وحيد .

خلاصة : يوجد  $\alpha$  وحيد من المجال  $]1; 2[$  حيث  $g(\alpha) = 0$  و عليه فإن المعادلة  $f(x) - x = 0$  أي  $f(x) = x$  تقبل حلا

وحيدا  $\alpha$  حيث  $1 < \alpha < 2$

إذن : منحنى الدالة  $f$  يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  في نقطة وحيدة إحداثياتها  $(\alpha; \alpha)$  حيث  $1 < \alpha < 2$

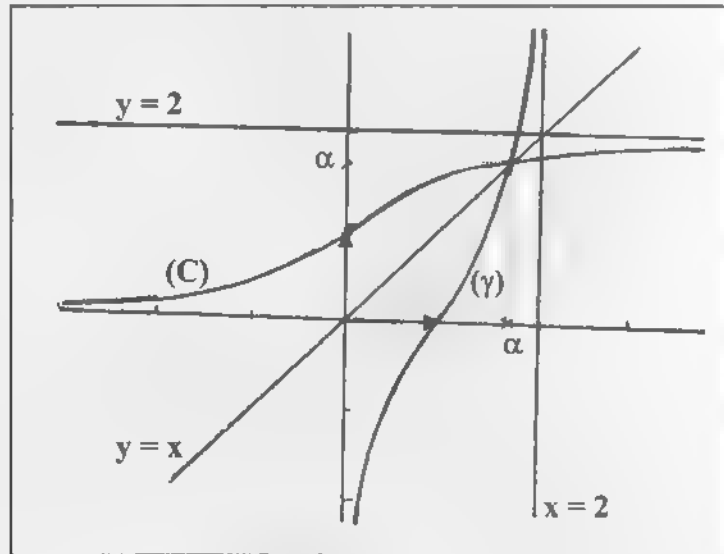
5- لنكن  $M(y; x)$  تنتمي إلى  $(\gamma)$

إذن  $M'(x; y)$  تنتمي إلى  $(C)$  لأن  $y = f(x)$

نلاحظ أن النقطة  $M$  هي نظيرة النقطة  $M'$  بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة  $y = x$

إذن : لإنشاء المجموعة  $(\gamma)$  يكفي إنشاء نظير المنحنى  $(C)$  بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  (لاحظ الشكل)

الإنشاء :



التمرين - 10

$f$  دالة معرفة بـ  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$  عين  $D$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2- تحقق أن :  $f(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

3- استنتج أن :  $4(x^2 + 1)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$

الحل - 10

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \geq 0 \dots\dots\dots (1) \\ x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0 \dots\dots (2) \end{cases} \quad - 1$$

المترابحة (1) دائما محققة

المترابحة (2) تكافئ  $\sqrt{x^2+1} \geq -x$  إذن : نميز حالتين :

الحالة الأولى :  $x > 0$

إذن :  $-x < 0$  منه المترابحة (2) دائما محققة لأن  $\sqrt{x^2+1} > 0$

الحالة الثانية :  $x \leq 0$

إذن :  $-x \geq 0$  منه المترابحة (2) تكافئ  $\sqrt{x^2+1} \geq -x$  حيث  $-x \geq 0$

تكافئ  $x^2+1 \geq x^2$

تكافئ  $1 \geq 0$  و هذا محقق دائما

خلاصة : المترابحتين (1) و (2) محقتين من أجل  $x \in \mathbb{R}$

إذن :  $D = \mathbb{R}$

2-  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}}$$

منه :

$$f'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}}$$

منه :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$$

منه :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+1}}$$

أي :

$$f(x) = 2\sqrt{x^2+1} \cdot f'(x) \quad \text{أي :}$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+1}}$$

3- حسب السؤال (2) لدينا :

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} f'(x) - 2\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) f(x)}{(2\sqrt{x^2+1})^2}$$

منه :

$$f''(x) = \frac{f(x) - 4x \left(\frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{4(x^2+1)}$$

أي :

$$f''(x) = \frac{f(x) - 4x f'(x)}{4(x^2+1)} \quad \text{أي :}$$

$$4(x^2+1) f''(x) = f(x) - 4x f'(x) \quad \text{أي :}$$

$$4(x^2+1) f''(x) + 4x f'(x) - f(x) = 0 \quad \text{أي :}$$

و هو المطلوب .

التمرين 11

$f$  دالة معرفة بـ  $f(x) = \frac{3x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 + 1}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عددين حقيقيين .

نسمي (C) منحنى الدالة  $f$  في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{I}; \vec{J})$

- 1- عين قيم  $\alpha$  و  $\beta$  حتى يكون المستقيم ذو المعادلة  $y = 4x + 3$  مماساً لـ (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .  
و ليكن ( $\Delta$ ) هذا المماس .

- 2- أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و ( $\Delta$ )

الحل - 11

1- معادلة المماس ( $\Delta$ ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad \text{أي} \quad y = f'(0)x + f(0)$$

$$\begin{cases} f'(0) = 4 \dots\dots\dots (1) \\ f(0) = 3 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{نحصل على : } y = 4x + 3 \text{ بالمطابقة مع المعادلة}$$

$$f(x) = \frac{3x^2 + \alpha x + 3}{x^2 + 1} \quad \text{أي} \quad f(0) = 3 \quad \text{أي} \quad \beta = 3 \quad \text{منه} \quad \frac{3(0) + \alpha(0) + \beta}{0 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(6x + \alpha)(x^2 + 1) - 2x(3x^2 + \alpha x + 3)}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$f'(0) = \frac{(6(0) + \alpha)(0 + 1) - 0}{(0 + 1)^2} = \alpha \quad \text{منه :}$$

$$\alpha = 4 \quad \text{إذن : } f'(0) = 4 \quad \text{يكافئ}$$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} \quad \text{إذن : } \alpha = 4 \quad \text{و} \quad \beta = 3$$

- 2- الوضعية النسبية لـ (C) و ( $\Delta$ ) :

$$\begin{aligned} f(x) - (4x + 3) &= \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} - (4x + 3) \\ &= \frac{3x^2 + 4x + 3 - 4x^3 - 4x - 3x^2 - 3}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{-4x^3}{x^2 + 1} \quad \text{من إشارة } -4x^3 \text{ لأن المقام موجب}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-4x^3$	+	0	-

خلاصة : لما  $x \in ]-\infty ; 0[$  المنحنى (C) فوق المماس ( $\Delta$ )

لما  $x = 0$  المنحنى (C) يقطع المماس ( $\Delta$ ) (يمسه) .

لما  $x \in ]0 ; +\infty[$  المنحنى (C) تحت المماس ( $\Delta$ )

التمرين - 12

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{4x - 2} & : x \leq 1 \\ x - \sqrt{x + 3} & : x > 1 \end{cases} \quad \text{دالة معرفة كمايلي :}$$

- 1- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 .

- 2- فسر هندسياً نتائج السؤال (1) .

الحل - 12

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{4x - 2} \quad \text{من أجل } x \leq 1 \quad \text{فإن}$$

$$f(1) = \frac{1 - 3}{4 - 2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 - 3x}{4x - 2} - (-1)}{x - 1} \quad \text{منه :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 4x - 2}{4x - 2} \times \frac{1}{x - 1}$$



$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{4x - 2} \times \frac{1}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{4x - 2} \times \frac{1}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{4x - 2} \\
&= \frac{1 + 2}{4 - 2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

من جهة أخرى :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x + 3} - (-1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1 - \sqrt{x + 3}}{x - 1} \times \frac{x + 1 + \sqrt{x + 3}}{x + 1 + \sqrt{x + 3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)^2 - (\sqrt{x + 3})^2}{(x - 1)(x + 1 + \sqrt{x + 3})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 1 - x - 3}{(x - 1)(x + 1 + \sqrt{x + 3})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)(x + 1 + \sqrt{x + 3})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1 + \sqrt{x + 3})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x + 1 + \sqrt{x + 3}} \\
&= \frac{1 + 2}{1 + 1 + \sqrt{1 + 3}} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

خلاصة : النسبة  $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  لا تقبل نهاية لما  $x$  يؤول إلى 1

إذن : الدالة  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند 1 .

2 - التفسير الهندسي :

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{4}$  إذن : منحني الدالة  $f$  يقبل نصف مماس على يسار النقطة ذات الفاصلة 1 ومعادلته

$$y = \frac{3}{2}(x - 1) + f(1) \quad \text{أي} \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - 1$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \quad \text{أي}$$

و لدينا أيضا :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{4}$  إذن : منحني الدالة  $f$  يقبل نصف مماس على يمين النقطة ذات الفاصلة 1 ومعادلته

$$y = \frac{3}{4}(x - 1) + f(1) \quad \text{أي} \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - 1$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \quad \text{أي}$$

## التمرين 13

$f_m$  دالة عددية معرفة بـ  $f_m(x) = x + 1 + \frac{4}{(x+m)^2}$  حيث  $m$  وسيط حقيقي .

نسمي  $(C_m)$  منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{I}; \vec{J})$

1 - لتكن  $Q$  نقطة من المستوى إحداثياتها  $(1; 3)$  . ما هو عدد المنحنيات  $(C_m)$  التي تمر بالنقطة  $Q$  ؟  
يطلب تعيين قيم  $m$  الموافقة .

2 - أثبت أن مماس المنحنى  $(C_m)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $(2-m)$  موازي لحامل محور الفواصل .

3 - أكتب معادلات مماسات المنحنى  $(C_m)$  عند النقطة  $Q$  .

## الحل 13

أولا لنحدد مجموعة تعريف الدالة  $f_m$  كمايلي :

$f_m$  معرفة من أجل  $x+m \neq 0$  أي  $x \neq -m$

منه :  $D_{f_m} = ]-\infty; -m[ \cup ]-m; +\infty[$

1 - يكون المنحنى  $(C_m)$  يشمل النقطة  $Q(1; 3)$  إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} 1 \neq -m \\ 1 + 1 + \frac{4}{(1+m)^2} = 3 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x \neq -m \\ f_m(1) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq -1 \\ 2 + \frac{4}{(1+m)^2} = 3 \end{cases} \quad \text{أي} \quad (\alpha) \dots\dots\dots$$

لنحل المعادلة  $(\alpha)$  ذات المجهول  $m$  كمايلي :

$$(\alpha) \Leftrightarrow \frac{2(1+m)^2 + 4}{(1+m)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 3(1+m)^2 = 2(1+m)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow (1+m)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+m=2 \\ \text{أو} \\ 1+m=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 & (\text{مقبول يختلف عن } -1) \\ \text{أو} \\ m=-3 & (\text{مقبول يختلف عن } -1) \end{cases}$$

نتيجة : يوجد منحنيين يشملان النقطة  $Q(1; 3)$  وهما  $C_1$  و  $C_{-3}$  أي من أجل  $m=1$  و  $m=-3$

2 - الدالة  $f_m$  ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$f'_m(x) = 1 + \frac{-2 \times 4(x+m)}{(x+m)^4}$$

$$= 1 - \frac{8}{(x+m)^3}$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{x+m}\right)^3$$

$$f'_m(2-m) = 1 - \left(\frac{2}{2-m+m}\right)^3 = 1 - (1)^3 = 0 \quad \text{منه :}$$

إذن : معامل توجيه مماس المنحنى  $(C_m)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $(2-m)$  معدوم أي هذا المماس يوازي حامل محور

الفواصل و معادلته  $y = f(2-m)$

3 - يوجد منحنيان فقط يشملان النقطة  $Q(1; 3)$  كمايلي :

المنحنى الأول :  $(C_1)$  إذن  $m=1$

$$f'_1(x) = 1 - \left(\frac{2}{x+1}\right)^3 \quad \text{منه}$$

$$f_1'(1) = 1 - \left(\frac{2}{2}\right)^3 = 0 \quad \text{أي :}$$

منه : معادلة المماس للمنحنى  $(C_1)$  عند النقطة Q هي :  $y = 3$  لأن  $f_1'(1) = 0$  و  $f_1(1) = 3$   
 المنحنى الثاني :  $(C_3)$  إذن  $m = -3$

$$f_3'(x) = 1 - \left(\frac{2}{x-3}\right)^3 \quad \text{منه}$$

$$f_3'(1) = 1 - \left(\frac{2}{-2}\right)^3 = 1 + 1 = 2 \quad \text{أي :}$$

منه : معادلة المماس للمنحنى  $(C_3)$  عند النقطة Q هي :  $y = 2(x-1) + 3$   
 أي من الشكل  $y = 2x + 1$

#### التمرين - 14

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x} \dots\dots (1) \\ x > 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{لتكن العلاقتين}$$

1 - عين قيم  $x$  حتى تكون العلاقتان (1) و (2) تعرفان دالة عددية  $f$ .

$$2 - \text{أحسب } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

3 - أثبت أن المنحنى (C) لممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد و متجانس يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 يطلب معادلته .

4 - أحسب الدالة المشتقة للدالة  $f$ .

5 - أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

6 - عين نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة  $y = x$

7 - أنشئ (C)

#### الحل - 14

$$1 - \text{ تكون العلاقتان (1) و (2) تعرفان دالة إذا و فقط إذا كان } \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-2; 2] \\ x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$\text{أي : } x \in ]0; 2] \text{ و هو المطلوب .}$$

- 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sqrt{4}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$3 - \text{ الدالة } f \text{ معرفة على يسار } 2 \text{ و } f(2) = \frac{2 + \sqrt{4-4}}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x} - 1}{x - 2} \quad \text{منه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 + \sqrt{4-x^2} - x}{x} \times \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x(x-2)} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{2-x} \times \sqrt{2+x}}{-x(2-x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x} \times \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}$$

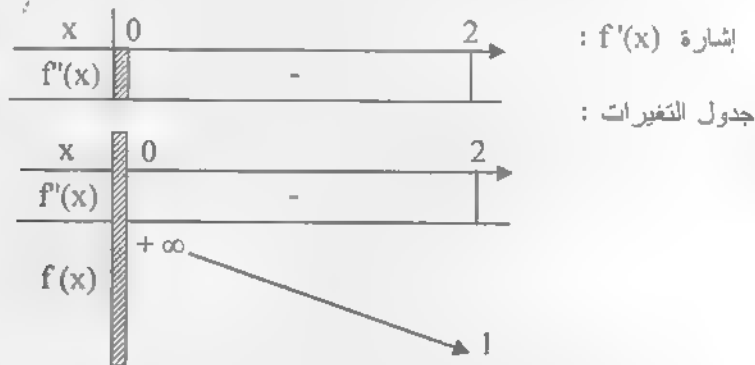
$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x} \left( 1 + \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \right)$$

إذن : المنحنى (C) يقبل نصف مماس شاقولي على يسار النقطة ذات الفاصلة 2 و معادلته  $x = 2$   
 $f = 4$  قابلة للاشتقاق على  $]0; 2[$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \times x - (2 - \sqrt{4-x^2})}{x^2}$$

$$= \frac{-\left( \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2 + \sqrt{4-x^2} \right)}{x^2}$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $]0; 2[$  فإن  $f'(x) < 0$  لأن  $\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2 + \sqrt{4-x^2} > 0$   
**5 - التغيرات :**



**6 - تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة  $y = x$**

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x} = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 + \sqrt{4-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$x^2-2$		+	0	-	0	+

إذن : على المجال  $]0; 2[$  لدينا :

x	0	$\sqrt{2}$	2	
$x^2 - 2$		-	0	+

نميز حالتين كمايلي :

الحالة (1)  $0 < x < \sqrt{2}$  : إذن  $x^2 - 2 < 0$

منه : المعادلة  $x^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}$  لا تقبل حلول في  $R$ .

الحالة (2)  $\sqrt{2} \leq x \leq 2$  : إذن  $x^2 - 2 \geq 0$

منه : المعادلة  $x^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}$  تكافئ  $(x^2 - 2)^2 = 4 - x^2$

$$\text{أي : } x^4 - 4x^2 + 4 = 4 - x^2$$

$$\text{أي : } x^4 - 3x^2 - 0$$

$$x^2(x^2-3) = 0 \quad \text{أي :}$$

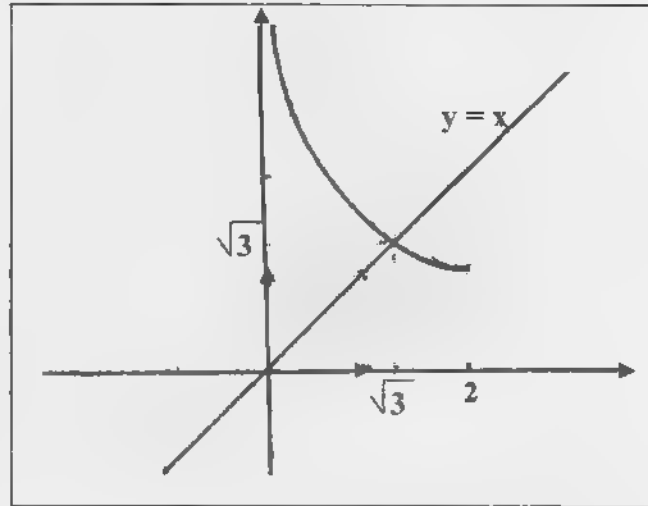
$$x = -\sqrt{3} \text{ أو } x = \sqrt{3} \text{ أو } x = 0 \quad \text{أي :}$$

منه : المعادلة تقبل حلا وحيدا هو  $\sqrt{3}$  لأن الحلول الأخرى لا تنتمي إلى المجال  $[\sqrt{2}; 2]$

خلاصة : المنحنى (C) يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  في نقطة وحيدة إحداثياتها  $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$ .

$$\text{تحقيق : } f(\sqrt{3}) = \frac{2 + \sqrt{4-3}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

الإثبات :



التمرين 15

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة بـ  $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^4}}{x}$

1- عين  $D$  مجموعة تعريف الدالة  $f$

2- أحسب  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  ثم فسر النتيجة هندسيا .

3- أثبت أن يوجد دالة عددية  $g$  مستمرة على المجال  $[-1; 1]$  حيث من أجل كل  $x$  من المجال  $[-1; 0[ \cup ]0; 1]$  فإن  $f(x) = g(x)$

4- هل الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق عند  $0$  ؟

5- أرسم منحنى الدالة  $g$  على المجال  $[-1; 1]$

الحل 15

$$-1 \quad x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^4 \geq 0 \dots\dots\dots (1) \\ x \neq 0 \end{cases}$$

المراجعة (1) تكافئ  $(1+x^2)(1-x^2) \geq 0$

$$\text{تكافئ } 1 - x^2 \geq 0 \quad \text{لأن } 1 + x^2 > 0$$

$$\text{تكافئ } -1 \leq x \leq 1$$

نتيجة :  $f$  معرفة على المجال  $[-1; 0[ \cup ]0; 1]$  (لأن  $x \neq 0$ )

-2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1 - \sqrt{1-x^4}}{x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{1-x^4} - x}{x} \times \frac{1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x - \sqrt{1-x^4}}{x(x-1)} \times \frac{1 - x + \sqrt{1-x^4}}{1 - x + \sqrt{1-x^4}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} \frac{x^4 + x^2 - 2x}{x^4 - x^3} & \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 2} \\ \hline \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^3 - x^2} & \\ \hline \frac{2x^2 - 2x}{2x^2 - 2x} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2x + x^2 - 1 + x^4}{x(x-1)(1-x+\sqrt{4-x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 - 2x}{x(x-1)(1-x+\sqrt{1-x^4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x^2+x+2)}{x(x-1)(1-x+\sqrt{1-x^4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{1 - x + \sqrt{1 - x^4}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + 1 + 2}{y}$$

$$= +\infty$$

التفسير الهندسي : منحني الدالة  $f$  يقبل نصف مماس شاقولي على يسار النقطة ذات الفاصلة  $x = 1$  و معادلته  $\begin{cases} x = 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$

3 - لنحسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  كما يلي :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x} \times \frac{1 + \sqrt{1 - x^4}}{1 + \sqrt{1 - x^4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + x^4}{x(1 + \sqrt{1 - x^4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x(1 + \sqrt{1 - x^4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 + \sqrt{1 - x^4}} \\ &= \frac{0}{1 + \sqrt{1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن يمكن تعريف الدالة  $g$  كما يلي :  $g(x) = \begin{cases} f(x) : x \in [-1; 0[ \cup ]0; 1] \\ 0 : x = 0 \end{cases}$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0$   
منه :  $g$  مستمرة عند 0

إذن :  $g$  مستمرة على  $[-1; 1]$  و من أجل كل  $x$  من  $[-1; 0[ \cup ]0; 1]$  فإن  $g(x) = f(x)$  هي الدالة المطلوبة .

4 - قابلية اشتقاق الدالة  $g$  عند 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x^2} \times \frac{1 + \sqrt{1 - x^4}}{1 + \sqrt{1 - x^4}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + x^4}{x^2 (1 + \sqrt{1 - x^4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 - x^4}} = 0$$

إذن : الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق عند  $0$  و عددها المشتق  $g'(0) = 0$

5- تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[-1; 1]$

$g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $] -1; 1[$  و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ f'(x) & : x \in ] -1; 0[ \cup ] 0; 1[ \end{cases}$$

لنحسب إذن :  $f'(x)$  كمايلي على المجال  $] -1; 0[ \cup ] 0; 1[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{1-x^4}} \times x - (1 - \sqrt{1-x^4})}{x^2} \\ &= \frac{\frac{2x^4}{\sqrt{1-x^4}} - 1 + \sqrt{1-x^4}}{x^2} \\ &= \frac{2x^4 - \sqrt{1-x^4} + 1 - x^4}{x^2 \sqrt{1-x^4}} \\ &= \frac{x^4 + 1 - \sqrt{1-x^4}}{x^2 \sqrt{1-x^4}} \end{aligned}$$

إذن : إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x^4 + 1 - \sqrt{1-x^4}$  كمايلي :

$$\begin{aligned} x^4 + 1 - \sqrt{1-x^4} &\geq 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 \geq \sqrt{1-x^4} \\ x \in ] -1; 0[ \cup ] 0; 1[ \text{ مع } &\Leftrightarrow x^8 + 2x^4 + 1 \geq 1 - x^4 \\ &\Leftrightarrow x^8 + 3x^4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^4(x^4 + 3) \geq 0 \\ &\text{و هذا محقق دائما .} \end{aligned}$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $] -1; 0[ \cup ] 0; 1[$  فإن  $f'(x) > 0$  أي  $g'(x) > 0$

منه : جدول إشارة  $g'(x)$  :

$x$	-1	0	1
$g'(x)$	+	0	+

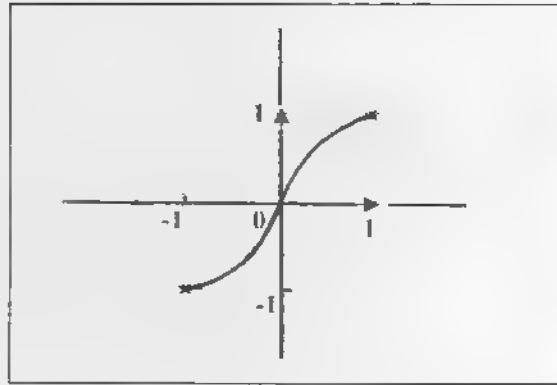
إذن : جدول تغيرات الدالة  $g$  كمايلي :

$x$	-1	0	1
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	-1	0	1

$$g(-1) = \frac{1 - \sqrt{1-1}}{-1} = -1$$

$$g(1) = \frac{1 - \sqrt{1-1}}{1} = 1$$

الإثشاء :



التمرين 16

$f_m$  دالة عددية للمتغير الحقيقي  $x$  معرفة بـ  $f_m(x) = \frac{x^2 + (m-2)x - 10}{x^2 - 2x - 3}$  حيث  $m$  وسيط حقيقي غير معدوم

نسمى  $(C_m)$  منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1 - عين قيم الوسيط الحقيقي  $m$  حتى تكون الدالة  $f_m$  متزايدة على كل مجال جزئي من مجموعة تعريفها .
- 2 - عين قيم الوسيط الحقيقي  $m$  حتى تقبل الدالة  $f_m$  قيمتين حديتين محليتين أحدهما عظمى و الأخرى صغرى .
- 3 - أثبت أن كل المنحنيات  $(C_m)$  تمر من نقطة ثابتة  $A$  يطلب تعيين إحداثياتها
- 4 - عين قيم  $m$  حتى يكون مماس المنحنى  $(C_m)$  عند النقطة  $A$  يوازي المستقيم ذو المعادلة  $y = \frac{-20}{9}x$

الحل 16

1 -  $f_m$  دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها . و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'_m(x) &= \frac{(2x + m - 2)(x^2 - 2x - 3) - (2x - 2)(x^2 + (m - 2)x - 10)}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 4x^2 - 6x + (m - 2)x^2 - 2(m - 2)x - 3(m - 2) - [2x^3 + 2(m - 2)x^2 - 20x - 2x^2 - 2(m - 2)x + 20]}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\ &= \frac{x^2(-4 + m - 2 - 2m + 4 + 2) + x(-6 - 2m + 4 + 20 + 2m - 4) - 3m + 6 - 20}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\ &= \frac{-mx^2 + 14x - (3m + 14)}{(x^2 - 2x - 3)^2} \end{aligned}$$

إذن : إشارة  $f'_m(x)$  هي إشارة  $-mx^2 + 14x - (3m + 14)$  و هو كثير حدود للمتغير  $x$  منه : تكون  $f_m$  متزايدة على كل مجال جزئي من مجموعة تعريفها إذا و فقط إذا

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} -m > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad \text{كان}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (14)^2 - 4(-m)(-3m - 14) \\ &= 196 - 4(3m^2 + 14m) \\ &= 196 - 12m^2 - 56m \end{aligned} \quad \text{لنحسب } \Delta :$$

لاحظ أن  $\Delta$  هو كثير حدود للمتغير الحقيقي  $m$  إذن إشارته تتعلق بالعدد الحقيقي  $m$  كمايلي :

$$\begin{aligned} \text{إشارة } -12m^2 - 56m + 196 \text{ هي إشارة } -3m^2 - 14m + 49 \\ \Delta &= (14)^2 - 4(-3)(49) \\ &= 196 + 588 = 784 = (28)^2 \end{aligned}$$

$$m_1 = \frac{14 - 28}{-6} = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3}$$

$$m_2 = \frac{14 + 28}{-6} = \frac{42}{-6} = -7$$

m	$-\infty$	-7	0	$7/3$	$+\infty$
$\Delta$	-	0	+	0	-

منه جدول إشارة  $\Delta$  كمايلي :



خلاصة : يكون  $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$  إذا و فقط إذا كان  $m \in ]-\infty ; -7]$  و هو المطلوب

2 - يكون للدالة  $f$  قيمتين حديتين محليتين أحدهما عظمى و الأخرى صغرى إذا و فقط إذا إنعدمت  $f'_m(x)$  مرتين على الأقل مغيرة إشارتها بالتناوب كمايلي  $+0-0+$  أو  $-0+0-$  و في هذه الحالة يكون هذا محقق إذا كان كثير الحدود  $(3m+14) - mx^2 + 14x - m$  للمغير الحقيقي  $x$  يقل جذرين مختلفين

أي  $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$  أي  $\begin{cases} m \neq 0 \\ -12m^2 - 56m + 196 > 0 \end{cases}$  و حسب السؤال (1) فإن  $\Delta > 0$  إذا و فقط إذا كان  $m \in ]-7 ; 0[ \cup ]0 ; 7/3[$  منه : قيم  $m$  المطلوبة هي  $m \in ]-7 ; 0[ \cup ]0 ; 7/3[$

3 - لنكن  $A(\alpha ; \beta)$  نقطة من المستوي .

تكون  $A$  مشتركة لكل المنحنيات  $(C_m)$  إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي  $m$  فإن  $f_m(\alpha) = \beta$

$$\alpha^2 - 2\alpha - 3 \neq 0 \text{ و } \frac{\alpha^2 + (m-2)\alpha - 10}{\alpha^2 - 2\alpha - 3} = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 + (m-2)\alpha - 10 = \beta(\alpha^2 - 2\alpha - 3)$$

$$\Leftrightarrow \alpha m + \alpha^2 - 2\alpha - 10 - \beta(\alpha^2 - 2\alpha - 3) = 0$$

إذن : يكون  $f_m(\alpha) = \beta$  من أجل كل  $m$  من  $\mathbb{R}$  إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 10/3 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \alpha = 0 \\ -10 + 3\beta = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha - 10 - 3(\alpha^2 - 2\alpha - 3) = 0 \end{cases}$$

نتيجة : النقطة  $A$  ذات الإحداثيات  $(0 ; 10/3)$  تنتمي إلى كل المنحنيات  $(C_m)$

4 - يكون مماس المنحنى  $(C_{11})$  عند النقطة  $A$  موازي للمستقيم ذو المعادلة  $y = \frac{-20}{9}x$  إذا و فقط إذا كان ميله يساوي  $-20/9$  أي  $f'_m(0) = -20/9$

$$f'_m(0) = \frac{-20}{9} \Leftrightarrow \frac{-(3m+14)}{9} = \frac{-20}{9} \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow 3m + 14 = 20$$

$$\Leftrightarrow 3m = 6$$

$$\Leftrightarrow m = 2$$

نتيجة : توجد قيمة وحيدة  $m$  حتى يكون مماس المنحنى  $(C_m)$  عند  $A$  يوازي المستقيم ذو المعادلة

$$m = 2 \text{ وهي } y = \frac{-20}{9}x$$

### التمرين 17

1 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$  ثم

أرسم منحناها  $(C)$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

2 - أكتب العبارة  $x - \sqrt{1+x^2}$  بدلالة  $f(x)$  ثم إستنتج عبارة الدالة  $g$  المعرفة على  $]0 ; +\infty[$  و التي تحقق أن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $g(f(x)) = x$

3 - أدرس تغيرات الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $h(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$

4 - تحقق أن إذا كانت  $M(x, y)$  نقطة من المنحنى الممثل للدالة  $h$  حيث  $x > 0$  فإن النقطة  $M'(y ; x)$  تنتمي إلى المنحنى  $(C)$  ثم إستنتج طريقة هندسية لإنشاء منحنى الدالة  $h$  على المجال  $]0 ; +\infty[$

### الحل 17

1 - تغيرات الدالة  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة على  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{1+x^2}) \times \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{1+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x - \sqrt{1+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{1+x^2} = -\infty \quad \text{لأن} \quad 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{1+x^2} = +\infty$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

إذن : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $x + \sqrt{1+x^2}$  لأن المقام موجب .

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} \geq 0 \quad \text{منه}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \geq -x$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى :  $x > 0$  إذن  $-x < 0$

منه المتراجحة  $\sqrt{1+x^2} > -x$  دائما محققة

أي :  $f'(x) > 0$  على المجال  $]0; +\infty[$

الحالة الثانية :  $x \leq 0$  إذن  $-x \geq 0$

منه المتراجحة  $\sqrt{1+x^2} \geq -x$  تكافئ  $1+x^2 \geq x^2$

تكافئ  $1 \geq 0$  وهذا دائما محقق

منه :  $f'(x) > 0$  على المجال  $]-\infty; 0]$

خلاصة : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $f'(x) > 0$

جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$		$+\infty$
	0	

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{1+x^2} - 2x$$

لاحظ أن :

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) \times \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

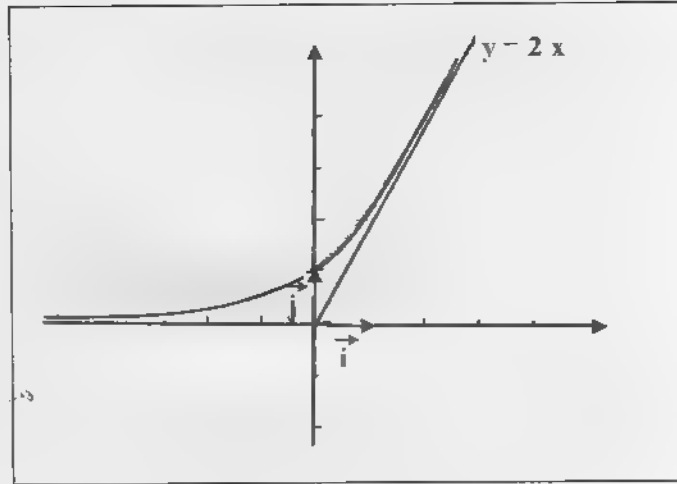
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$$= 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x$  مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار  $+\infty$

الإثشاء :



2- لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $(x + \sqrt{1+x^2})(x - \sqrt{1+x^2}) = -1$

أي :  $x - \sqrt{1+x^2} = \frac{-1}{f(x)}$  و هي العلاقة (1)

من جهة أخرى لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $(x + \sqrt{1+x^2}) + (x - \sqrt{1+x^2}) = 2x$

أي :  $f(x) + (x - \sqrt{1+x^2}) = 2x$

أي :  $x - \sqrt{1+x^2} = 2x - f(x)$  و هي العلاقة (2)

لتكن  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  حيث  $\text{gof}(x) = x$

نضع  $f(x) = y$  إذن :  $g(y) = x \Leftrightarrow \text{gof}(x) = x$  ..... (3)  
لدينا العلاقتين (1) و (2) كمايلي :

$$\begin{cases} x - \sqrt{1+x^2} = \frac{-1}{f(x)} \\ x - \sqrt{1+x^2} = 2x - f(x) \end{cases} \quad \text{إذن : } \frac{-1}{f(x)} = 2x - f(x)$$

$$\text{معه : } -\frac{1}{y} = 2x - y \quad \text{لأن } y = f(x)$$

$$\text{أي : } y - \frac{1}{y} = 2x$$

$$\text{أي : } \frac{y^2 - 1}{y} = 2x$$

$$\text{أي : } x = \frac{y^2 - 1}{2y} \quad (\text{لأن } f(x) > 0 \text{ أي } y > 0)$$

$$\text{معه العلاقة (3) تصبح : } \text{gof}(x) = x \Leftrightarrow g(y) = \frac{y^2 - 1}{2y}$$

$$\text{و بصفة خاصة : } g(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} \quad \text{مع } x > 0 \quad (\text{لأن } y > 0)$$

تحقيق : ليكن  $x$  عدد حقيقي.

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^2 - 1}{2(x + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2 - 1}{2(x + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{2x(x + \sqrt{1+x^2})}{2(x + \sqrt{1+x^2})} \end{aligned}$$

$$g \circ f(x) = x \quad \text{إذن فعلا } x$$

3 - تغيرات الدالة  $h : h$  معرفة على  $\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} \left( 0 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

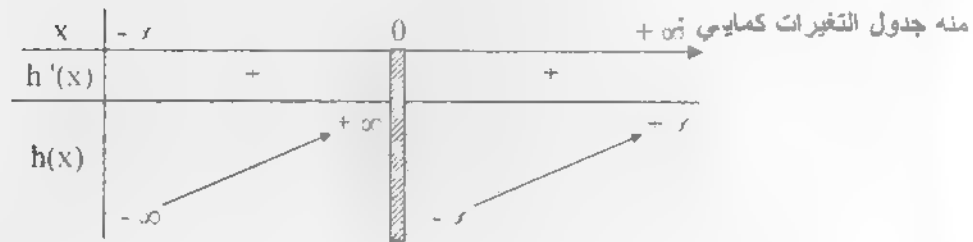
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left( 0 - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^*$  و دالتها المشتقة :

$$h'(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{x^2} \right]$$

اذن : من أجل كل  $x \in \mathbb{R}^*$  :  $h'(x) > 0$



4 - لتكن  $M(x; y)$  نقطة من منحنى الدالة  $h$  حيث  $x > 0$

$$h(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{2x} = y$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy - 1 = 0$$

هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول  $x$  حيث  $x > 0$

إذن نبحث عن حلولها كمايلي :

$$\Delta = 4y^2 + 4 = 4(1 + y^2) \quad \text{إذن : المعادلة تقبل حلين كمايلي :}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2y - 2\sqrt{1+y^2}}{2} = y - \sqrt{1+y^2} & \text{سالب إذن مرفوض} \\ x_2 = \frac{2y + 2\sqrt{1+y^2}}{2} = y + \sqrt{1+y^2} & \text{موجب إذن مقبول} \end{cases}$$

نتيجة : المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا هو  $x = y + \sqrt{1+y^2}$

منه : إذا كانت النقطة  $M(x; y)$  تنتمي إلى منحنى الدالة  $h$  حيث  $x > 0$

فإن  $M'(y; x)$  أي  $M'(y; y + \sqrt{1+y^2})$  تنتمي إلى المنحنى (C) لأن :  $y + \sqrt{1+y^2} = f(y)$

منه منحنى الدالة  $h$  على المجال  $]0; +\infty[$  هو نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى المنصف الأول

التمرين 18 -

$f$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}$

تسمى (C) منحنىها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 - أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

2 - احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$  . فسر النتائج هندسيا

3 - أنشئ بعناية المنحنى (C)

$x$	$-\infty$	$-1/2$	$1/2$	$+\infty$
$4x^2 - 1$	+	0	0	+

1 - التغيرات :  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$   
لاحظ إشارة  $4x^2 - 1$  كمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{4x^2 - 1} & : x \in ]-\infty; -1/2[ \cup ]1/2; +\infty[ \\ x + \sqrt{1 - 4x^2} & : x \in ]-1/2; 1/2[ \end{cases} \quad \text{منه}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - x \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \quad \text{لأن } \sqrt{x^2} = -x \text{ لما } x < 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 - \sqrt{4}) \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1} = +\infty \end{aligned}$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R} - \{-1/2; 1/2\}$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 1 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 - 1}} & : x \in ]-\infty; -1/2[ \cup ]1/2; +\infty[ \\ 1 - \frac{8x}{2\sqrt{1 - 4x^2}} & : x \in ]-1/2; 1/2[ \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} & : x \in ]-\infty; -1/2[ \cup ]1/2; +\infty[ \\ 1 - \frac{4x}{\sqrt{1 - 4x^2}} & : x \in ]-1/2; 1/2[ \end{cases} \end{aligned} \quad \text{إشارة } f'(x) :$$

$$f'(x) = 1 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} \quad ]-\infty; -1/2[ \cup ]1/2; +\infty[ \quad \text{أولا على المجال}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{-4x}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى :  $x \in ]1/2; +\infty[$  أي  $x \geq 0$  منه  $-4x \leq 0$

$$\text{أي المتراجحة } 1 \geq \frac{-4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} \text{ دائما محققة}$$

أي :  $f'(x) > 0$  لما  $x \in ]1/2; +\infty[$

الحالة الثانية :  $x \in ]-\infty; -1/2[$  أي  $x \leq 0$  منه  $-4x \geq 0$

$$\text{أي المتراجحة } 1 \geq \frac{-4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} \text{ تكافئ } 1 \geq \frac{16x^2}{4x^2 - 1}$$

$$4x^2 - 1 \geq 16x^2 \quad \text{تكافئ}$$

$$-12x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$\text{تكافئ } - (12x^2 + 1) \geq 0 \text{ وهذا مستحيل}$$

منه :  $f'(x) < 0$  لما  $x \in ]-\infty ; -1/2[$

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	

خلاصة :

ثانيا : على المجال  $] -1/2 ; 1/2[$  :

$$f'(x) = 1 - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى :  $x \in ]-1/2 ; 0]$  أي  $x \leq 0$  منه  $4x \leq 0$

إذن المتراجحة  $1 > \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$  دائما محققة

أي :  $f'(x) > 0$

الحالة الثانية :  $x \in ]0 ; 1/2[$  أي  $x > 0$  منه  $4x > 0$

أي المتراجحة  $1 \geq \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$  تكافئ  $1 \geq \frac{16x^2}{1-4x^2}$

تكافئ  $1 - 4x^2 \geq 16x^2$

تكافئ  $1 - 20x^2 \geq 0$

تكافئ  $x \in [-\frac{1}{\sqrt{20}} ; \frac{1}{\sqrt{20}}]$

أي  $x \in ]0 ; \frac{1}{\sqrt{20}}]$  لأن في هذه الحالة  $x \in ]0 ; 1/2[$  فقط

x	$-1/2$	$1/\sqrt{20}$	$1/2$
$f'(x)$		0	
	-	+	-

خلاصة :

نتيجة : إشارة المشتقة  $f'(x)$  على  $\mathbb{R}$  كمايلي :

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/\sqrt{20}$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		0	-	+

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/\sqrt{20}$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-1/2$	$\sqrt{5}/2$	$1/2$	$+\infty$

$$f(-1/2) = -1/2 + \sqrt{0} = -1/2$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right) = \frac{1}{\sqrt{20}} + \sqrt{1 - \frac{4}{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{16}{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 - 1}$$

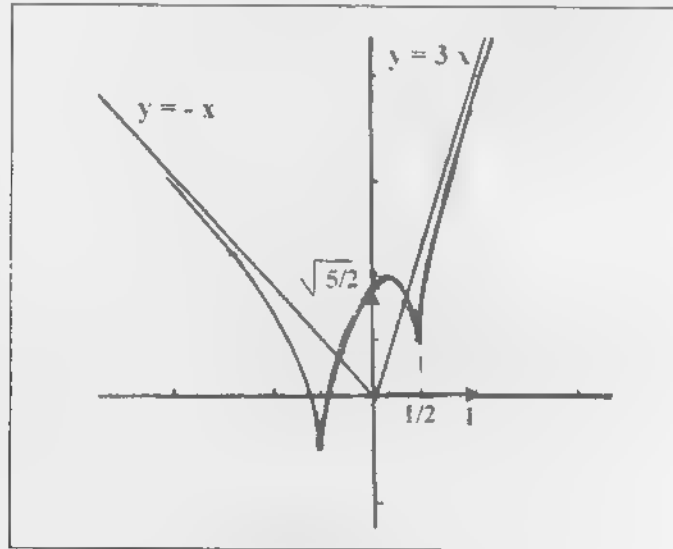
-2

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 - 1}) \times \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 + 1}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة  $y = -x$  مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار  $-\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1} - 3x \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 1} - 2x \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 1} - 2x) \times \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة  $y = 3x$  مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار  $+\infty$  الإنشاء :



### التمرين 19

$g$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$  1 - أدرس تغيرات الدالة  $g$ .

2 - برهن أن من أجل كل  $\alpha$  من المجال  $] -1; 0[$  فإن المعادلة  $g(x) = \alpha$  تقبل حلا وحيدا في  $\mathbb{R}$ .

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$

و ليكن (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

3 - أدرس تغيرات الدالة  $f$

4 - أثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة  $y = -x + 1$  مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار  $-\infty$

5 - أدرس الوضعية النسبية لـ (d) و المنحنى (C)

6 - أنشئ بعناية المنحنى (C).

1 - تغيرات الدالة  $g : g$  معرفة على  $\mathbb{R}$ 

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$|x| = -x \quad \text{لأن} \quad x < 0 \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} - \frac{x}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1}}$$

$$= 0$$

 $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)} \times \frac{1}{(x^2+1)} \right] \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

منه :  $g'(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :إذن : جدول تغيرات الدالة  $g$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	-1	0

2 - من جدول تغيرات الدالة  $g$  لدينا النتائج التالية :

$\left\{ \begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } ]-\infty; +\infty[ \text{ و } g \text{ تأخذ قيم في المجال } ]-1; 0[ \\ g \text{ متزايدة تماما على } ]-\infty; +\infty[ \end{array} \right\}$

إذن : من أجل كل  $\alpha$  من  $] -1 ; 0 [$  فإن المعادلة  $g(x) = \alpha$  تقبل حلا وحيدا على  $\mathbb{R}$ 3 - تغيرات الدالة  $f$  : $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ 

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} [\sqrt{x^2 + 1} - x]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \times \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \text{ لأن } -1$$

f قابلة للاستقار على IR و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

و لكن حسب السؤال (1) فإن من أجل كل x من IR فإن  $-1 < g(x) < 0$  أي  $g(x) < 0$  منه  $f'(x) < 0$  منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)		-
f(x)	$+\infty$	1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1} - (-x + 1) \quad -4$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 + 1}) \left( \frac{x \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{x \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$= 0$$

إذن : المستقيم (d) ذو المعادلة  $y = -x + 1$  مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار  $-\infty$

5- الوضعية النسبية لـ (C) و (d) :

$$\begin{aligned} f(x) - (-x + 1) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{aligned}$$

إذن : إشارة  $f(x) - (-x + 1)$  هي إشارة  $x + \sqrt{x^2 + 1}$  كمايلي :

$$x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \geq -x$$

الحالة (1)  $x \geq 0$  أي  $-x \leq 0$

منه : المتراجحة  $\sqrt{x^2+1} > -x$  دائما محققة .

أي :  $x + \sqrt{x^2+1} > 0$

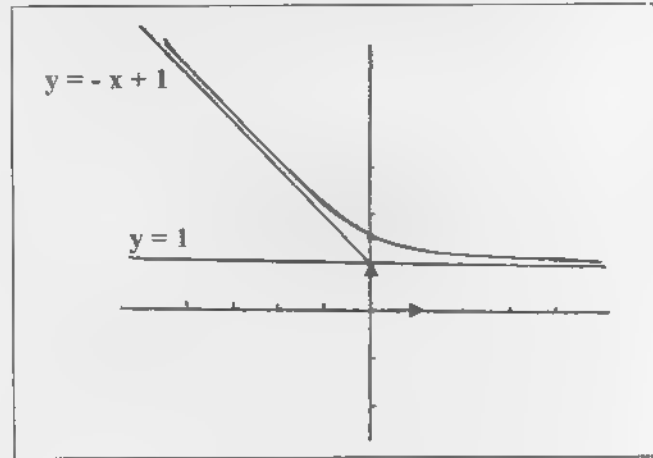
الحالة (2)  $x < 0$  أي  $-x > 0$

منه : المتراجحة  $\sqrt{x^2+1} \geq -x$  تكافئ  $x^2+1 \geq x^2$

تكافئ  $1 \geq 0$

منه : المتراجحة  $\sqrt{x^2+1} \geq -x$  دائما محققة .

خلاصة : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $x + \sqrt{x^2+1} > 0$  أي المنحنى (C) دائما فوق المستقيم (d)  $f(0) = 3/2$



### التمرين - 20

$f_k$  دالة عددية للمتغير الحقيقي  $x$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f_k(x) = \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$  حيث  $k$  عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي  $(C_k)$  المنحنى الممثل للدالة  $f_k$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 - ادرس حسب قيم  $k$  ( $k \geq 1$ ) تغيرات الدالة  $f_k$  .

2 - أثبت أن كل المنحنيات  $(C_k)$  الممثلة للدالة  $f_k$  في مستوى منسوب إلى معلم تمر بنقطتين ثابتتين يطلب إحداثياتها من أجل  $k > 1$

3 - أنشئ كل من  $(C_1)$  و  $(C_2)$  و  $(C_3)$

### الحل - 20

1 - تغيرات الدالة  $f_k$  :

$f_k$  معرفة على  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^k}{|x| \sqrt{1+1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{k-1}}{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{k-2}}{-1} \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ و } |x| = -x \text{ في جوار } -\infty$$

إن نميز الحالات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1 \quad \text{أولا : } k=1$$

ثانيا :  $k$  زوجي إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} - (x)^{k-1} = +\infty$  لأن  $(k-1)$  فردي

ثالثا :  $k$  فردي إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} - (x)^{k-1} = -\infty$  لأن  $(k-1)$  زوجي  $k > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$-\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{x}$$

إذن : نمر الحالات التالية :

ولا :  $k = 1$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x/x = 1$

ثانيا :  $k > 1$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x)^{k-1} = +\infty$

خلاصة :

	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$
$k = 1$	- 1	1
$k$ زوجي	$+\infty$	$+\infty$
$k$ فردي	$-\infty$	$+\infty$

$f_k$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المسماة :

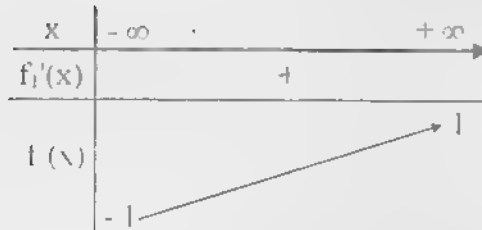
أولا :  $k = 1$

$$f_1'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

إذن :  $f_1'(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  .  
منه جدول التغيرات من أجل  $k = 1$



ثانيا :  $k > 1$

$$f_k'(x) = \frac{k x^{k-1} \sqrt{x^2+1} - \frac{2x^{k+1}}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{k x^{k-1}(x^2+1) - x^{k+1}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

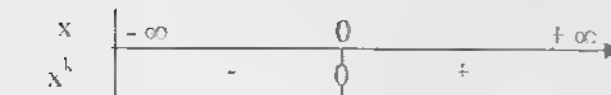
$$= \frac{k x^{k+1} + k x^{k-1} - x^{k+1}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^{k-1}[(k-1)x^2 + k]}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

إذن : إشارة  $f_k'(x)$  هي إشارة  $x^{k-1}$  لأن  $(k-1)x^2 + k > 0$  من أجل  $k > 1$   
 $(x^2+1)\sqrt{x^2+1} > 0$

إذن : نميز حالتين كمالي :

الحالة الأولى :  $k$  زوجي أي  $(k-1)$  فردي



الحالة الثانية :  $\left. \begin{array}{l} k \text{ فردي أي } (k-1) \text{ زوجي} \\ k > 1 \end{array} \right\}$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$x^{k-1}$		$0$	
	$+$	$0$	$+$

منه جدول التغيرات التالي :  
 $k$  زوجي

$k$  فردي ( $k > 1$ )

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f_k'(x)$	$+$	$0$	$+$
$f_k(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

$k$  زوجي

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f_k'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f_k(x)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

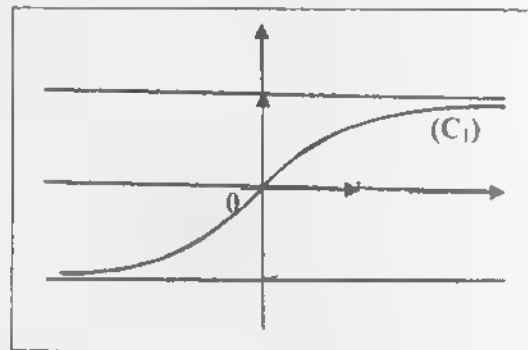
2- ليكن  $k > 1$

لدينا :  $f_k(0) = 0$  و  $f_k(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن : المنحنى  $(C_k)$  يشمل نقطتين ثابتتين إحدائهما  $(0; 0)$  و  $(1; \frac{1}{\sqrt{2}})$

3- الإنشاء :

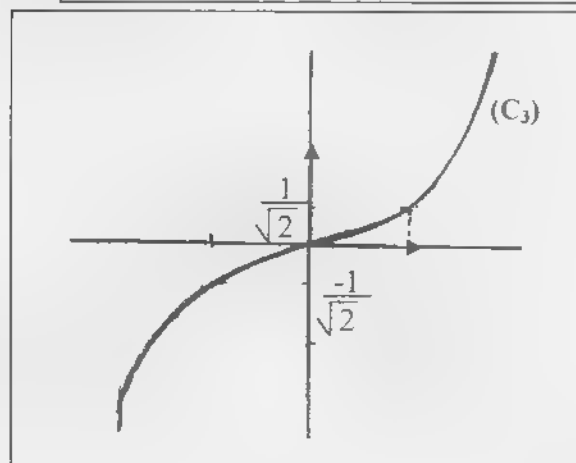
أولا :  $(C_1)$



ثانيا :  $(C_2)$   $k$  زوجي



ثالثا :  $(C_3)$   $k$  فردي



التمرين - 21

$f$  دالة معرفة على المجال  $[0; \pi]$   $f(x) = \cos^3 x - \frac{3}{2} \cos x$   
 1- أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0; \pi]$

- 2 - عين نقطة تقاطع المنحنى (C) الممثل للدالة  $f$  مع حامل محور الفواصل في مستوى منسوب إلى معلم متعامد .  
 و لتكن A هذه النقطة .  
 3 - أثبت أن A هي مركز تناظر للمنحنى (C)  
 4 - أنشئ بعناية المنحنى (C)  
 5 - أكتب العبارة  $\cos^3 x$  من الشكل  $a \cos x + b \cos 3x$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .

الحل - 21

1 - التغيرات :  $f$  معرفة على  $[0 ; \pi]$ 

$$f(0) = \cos^3 0 - \frac{3}{2} \cos 0 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(\pi) = \cos^3 \pi - \frac{3}{2} \cos \pi = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

 $f$  قابلة للاشتقاق على  $[0 ; \pi]$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \sin x \cos^2 x + \frac{3}{2} \sin x \\ &= \frac{3}{2} \sin x [1 - 2 \cos^2 x] \end{aligned}$$

إذن : إشارة  $f'(x)$  على  $[0 ; \pi]$  هي إشارة الجداء  $\sin x(1 - 2 \cos^2 x)$ 

$$1 - 2 \cos^2 x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2 \cos^2 x \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow 1/2 \geq \cos^2 x$$

$x$	0	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi$	$\Leftrightarrow 1/2 \geq \cos^2 x$
$\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x$	-	0	+	-	$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq \cos^2 x$
$\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x$	+	+	0	-	$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x\right) \geq 0$
الجداء	-	0	+	0	

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x\right) \geq 0$$

منه جدول الإشارة التالي :

x	0	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi$			
$\sin x$	0		+	0			
$1 - 2 \cos^2 x$	-	0	+	0	-		
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  كمايلي :

x	0	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi$	
f'(x)	0	-	0	+	0
f(x)	-1/2	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1/2	

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^3 \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^3 \left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} \cos \left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2 - التقاطع مع حامل محور الفواصل :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^3 x - \frac{3}{2} \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (\cos^2 x - \frac{3}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{أو} \\ \cos^2 x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{مستحيل}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$$

نتيجة : المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A إحداثياتها  $A(\pi/2; 0)$

$$- \pi \leq -x \leq 0 \quad \text{إذن} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\text{منه} \quad 0 \leq \pi - x \leq \pi$$

$$\text{أي} \quad 0 \leq 2(\frac{\pi}{2}) - x \leq \pi$$

$$f(\pi - x) = \cos^3(\pi - x) - \frac{3}{2} \cos(\pi - x) \quad \text{و لدينا :}$$

$$= (-\cos x)^3 - \frac{3}{2} (-\cos x)$$

$$= -\cos^3 x + \frac{3}{2} \cos x$$

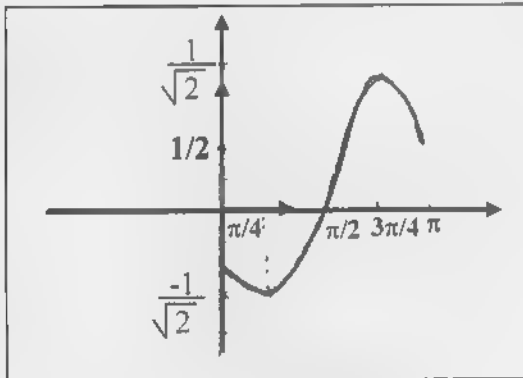
$$2(0) - f(x) = -f(x) \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$= -\cos^3 x + \frac{3}{2} \cos x$$

خلاصة : من أجل كل  $x$  من  $[0; \pi]$  فإن  $(2(\frac{\pi}{2}) - x) \in [0; \pi]$  و  $f(2(\frac{\pi}{2}) - x) = 2(0) - f(x)$

إذن : النقطة  $A(\frac{\pi}{2}; 0)$  مركز تناظر للمنحنى (C)

4 - الإنشاء :



5 - ليكن  $x \in [0; \pi]$

$$\cos 3x = \cos(x + 2x)$$

$$= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$

$$= \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x (2 \sin x \cos x)$$

$$= \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\text{نتيجة :} \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad \text{منه} \quad 4 \cos^3 x = \cos 3x + 3 \cos x$$

$$\text{أي :} \quad \cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$$

$$\text{أي :} \quad a = 3/4 \quad \text{و} \quad b = 1/4 \quad \text{هو المطلوب}$$

## التمرين 22

لتكن  $F$  مجموعة الدوال العددية المستمرة  $f$  و التي تحقق الشرطين التاليين :

$$\left. \begin{aligned} (1) \text{ من أجل كل } (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) \times f(x-y) &= [f(x) \times f(y)]^2 \\ (2) \quad f(0) &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

1 - نتحقق أن الدالة  $x \mapsto 2^{-x}$  تنتمي إلى مجموعة الدوال  $F$

2 - عبر عن الشرط (1) في كل حالة من الحالات التالية :

$$(أ) \quad x=0 \quad (ب) \quad y=0 \quad (ج) \quad x=y$$

3 - استنتج القيم الممكنة لـ  $f(0)$

4 - أثبت أن  $f(0)=0$  إذا وفقط إذا كانت  $f$  هي الدالة  $x \mapsto 0$ .

لنفرض أن يوجد عدد حقيقي غير معدوم  $a$  حيث  $f(a)=0$

نعرف المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بـ  $u_n = \frac{a}{2^n}$

5 - أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

6 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $f(u_n) = 0$

7 - استنتج أن  $f(0) = 0$

الحل - 22

1 - نصع  $f(x) = 2^{-x^2}$

لدينا  $f(0) = 2^0 = 1$

إذن :  $f(0) \geq 0$  منه الشرط (2) محقق .

و من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ، من أجل كل  $y$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :

$$\begin{aligned} f(x+y) \times f(x-y) &= 2^{-(x+y)^2} \times 2^{-(x-y)^2} \\ &= 2^{-x^2-2xy-y^2} \times 2^{-x^2+2xy-y^2} \\ &= 2^{-2x^2-2y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f(x) \times f(y)]^2 &= [2^{-x^2} \times 2^{-y^2}]^2 \\ &= [2^{-x^2-y^2}]^2 \\ &= 2^{-2x^2-2y^2} \end{aligned}$$

نتيجة :  $f(x+y) \times f(x-y) = [f(x) \times f(y)]^2$  أي الشرط (1) محقق .

خلاصة :  $f$  تحقق الشرطين (1) و (2) معا و  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  إذن  $f$  تنتمي إلى مجموعة الدوال  $F$  .

2 - لدينا :  $f(x+y) \times f(x-y) = [f(x) \times f(y)]^2$  من أجل كل  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

(أ) من أجل  $x=0$  الشرط (1) يصبح :

$$f(y) \times f(-y) = [f(0) \times f(y)]^2$$

$$f(y) \times f(-y) = [f(0)]^2 \times [f(y)]^2 \dots (3)$$

(ب) من أجل  $y=0$  الشرط (1) يصبح :

$$f(x) \times f(x) = [f(0) \times f(x)]^2$$

$$[f(x)]^2 = [f(0)]^2 \times [f(x)]^2 \dots (4)$$

(ج) من أجل  $x=y$  الشرط (1) يصبح :

$$f(2x) \times f(0) = [f(x) \times f(x)]^2$$

$$f(2x) \times f(0) = [f(x)]^4 \dots (5)$$

3 - حسب العلاقة (4) لدينا :

$$[f(x)]^2(1 - [f(0)]^2) = 0$$

$$f(x) = 0 \text{ أو } (1 - [f(0)]^2) = 0$$

$$[f(x) = 0 \text{ أي } f(0) = 1 \text{ أو } f(0) = -1 \text{ أو } f(0) = 0 \text{ و } f \text{ معدومة أي } f(x) = 0$$

$$f(0) \geq 0 \text{ لكن}$$

منه : القيم الممكنة لـ  $f(0)$  هي 0 أو 1 .

4 - حسب العلاقة (4) يكون  $f(0) = 0$  إذا و فقط إذا كان  $[f(x)]^2 = 0$  من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$

أي  $f(x) = 0$  من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$

منه : يكون  $f(0) = 0$  إذا و فقط إذا كانت  $f$  هي الدالة  $x \mapsto 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{2^n} \quad - 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x} = 0$$

إذن : المتتالية  $(u_n)$  متقاربة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

6 - البرهان بالتراجع أن من أجل كل  $n$  من  $N$  :  $f(u_n) = 0$  : (في حالة  $f$  ليست الدالة  $x \mapsto 0$ )

من أجل  $n=0$  :

$$f(u_0) = f\left(\frac{a}{2^0}\right) = f(a) = 0$$

إذن : الخاصية محققة من أجل  $n=0$

نفرض أن  $f(u_n) = 0$  من أجل  $n > 0$

هل  $f(u_{n+1}) = 0$  ؟

لدينا حسب فرضية التراجع :  $f(u_n) = 0$

$$f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0 \quad \text{أي}$$

$$f\left(2 \times \frac{a}{2^{n+1}}\right) = 0 \quad \text{أي}$$

$$f\left(2 \times \frac{a}{2^{n+1}}\right) \times f(0) = 0 \times f(0) \quad \text{أي}$$

$$\left[f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\right]^4 = 0 \quad \text{أي} \quad \left(x = \frac{a}{2^{n+1}}\right) \text{ نضع من السؤال 2 (5) حسب العلاقة}$$

$$f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = 0 \quad \text{أي}$$

$$f(u_{n+1}) = 0 \quad \text{أي}$$

منه : الحاصية محققة من أجل  $n+1$

في حالة  $f$  هي الدالة  $x \rightarrow 0$  فإن  $f(u_n) = 0$  محقق من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$

نتيجة : من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  :  $f(u_n) = 0$

7 - لدينا  $f(u_n) = 0$  من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$

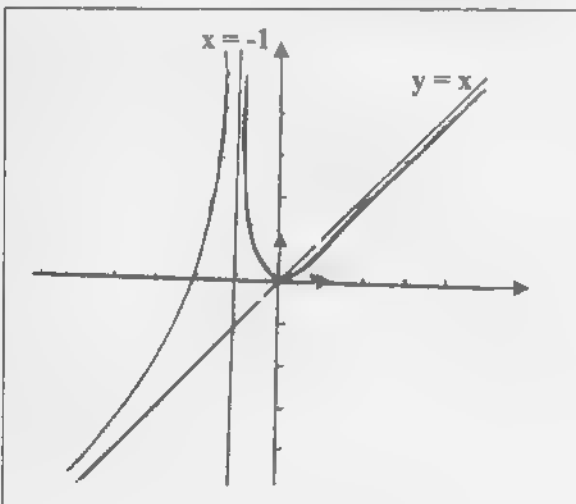
لكن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

إذن :  $f[\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n] = 0$  لأن  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$

أي :  $f(0) = 0$  و هو المطلوب .

### التمرين 23

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  بـ  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$  و (C) منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .



$g(x) = |x|$  بـ  $\mathbb{R}$  دالة معرفة على

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  نعرف الدالة  $\phi$  كمايلي :  $\phi(x) = f(g(x))$

1 - برهن أن الدالة  $\phi$  زوجية

2 - تحقق أن : من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$

فإن  $\phi(x) = f(x)$

3 - استنتج طريقة بسيطة لرسم منحنى الدالة  $\phi$  على  $\mathbb{R}$  دون

دراسة تغيرات الدالة  $\phi$  . ثم أرسم المنحنى  $(\gamma)$  الممثل للدالة  $\phi$  .

### الحل - 23

1 - ليكن  $x \in \mathbb{R}$  إذن :  $f(g(x)) = f(|x|)$

منه :  $\phi(x) = f(|x|)$

$$\frac{|x|^3 + 2|x|^2}{(|x| + 1)^2}$$

إذن :  $\phi$  معرفة على  $\mathbb{R}$

و لدينا : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $(-x) \in \mathbb{R}$  و  $\phi(-x) = \frac{|-x|^3 + 2|-x|^2}{(|-x| + 1)^2}$

$$= \frac{|x|^3 + 2|x|^2}{(|x| + 1)^2}$$

$$= \phi(x)$$

إذن : الدالة  $\phi$  زوجية .

2 - ليكن  $x \in [0; +\infty[$  إذن :  $|x| = x$

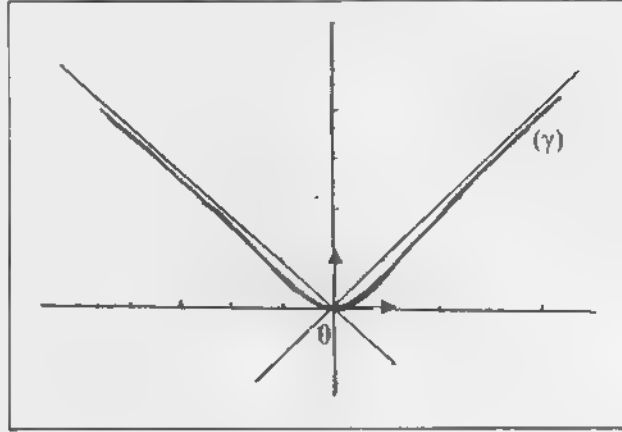
$$\phi(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{هـ}$$

أي :  $\phi(x) = f(x)$  و هو المطلوب



3 - دالة زوجية إذن يكفي رسم منحناها على المجال  $[0 ; +\infty[$  ثم إستنتاج الجزء الآخر على المجال  $] -\infty ; 0 ]$  بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب .

و لكن لما  $x \in [0 ; +\infty[$  لدينا  $f(x) = \phi(x)$  أي منحنى الدالة  $\phi$  على المجال  $[0 ; +\infty[$  ينطبق على جزء المنحنى (C) على المجال  $[0 ; +\infty[$  إذن : نرسم هذا الجزء ثم نظيره بالنسبة إلى محور الترتيب كمايلي :



## الدوال الأسية و اللوغارتمية

### I - الدوال الأسية

توجد دالة وحيدة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و تحقق الشرطين التاليين :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots\dots\dots f'(x) = f(x) \\ (2) \dots\dots\dots f(0) = 1 \end{array} \right\}$$

هذه الدالة تسمى الدالة الأسية النيبيرية و نرمز لها بالرمز  $\exp$

إذن الشرطين (1) و (2) يكتبان من الشكل :  $\left. \begin{array}{l} (1) \dots\dots\dots \exp'(x) = \exp(x) \\ (2) \dots\dots\dots \exp(0) = 1 \end{array} \right\}$

الخواص الجبرية للدالة  $\exp$

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  و من أجل كل عدد صحيح نسبي  $n$  لدينا :

$$\exp(x) \neq 0 \quad (1)$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad (2)$$

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) \quad (3)$$

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad (4)$$

$$\exp(nx) = [\exp(x)]^n \quad (5)$$

العدد  $e$

العدد  $e$  هو صورة العدد 1 بالدالة  $\exp$  أي  $\exp(1) = e$  إذن : الخاصية (5) تصبح كمايلي : من أجل  $x = 1$  نحصل

$$\exp(n) = e^n \text{ أي } \exp(n) = [\exp(1)]^n$$

نعم اصطلاحا هذه النتيجة من أجل كل عدد حقيقي  $x$  بـ  $\exp(x) = e^x$  و نقرأ : " أسية  $x$  "

ملاحظة (1) : العدد  $e$  تقريبا يساوي 2,718281828

ملاحظة (2) : الخواص الجبرية للدالة  $\exp$  متلائمة مع خواص القوى الصحيحة لعدد حقيقي .

و تكتب باستعمال العدد  $e$  كمايلي :

$$e^0 = 1 \quad (1) \quad e^{x+y} = e^x \times e^y \quad (3) \quad e^{nx} = (e^x)^n \quad (5)$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (2) \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (4)$$

### نشاط 1

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  1 - بين أن  $f$  دالة فردية

2 - بين أن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}$

### الحل - 1

1 - من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $(-x) \in \mathbb{R}$

و لدينا :

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

$$= \frac{1 - e^x}{e^x + 1}$$

$$= \frac{1 - e^x}{e^x} \times \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$\frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

$$= - \frac{(e^x - 1)}{e^x + 1}$$

إذن : الدالة  $f$  فردية .

2- ليكن  $x \in \mathbb{R}$  إذن :  $2x \in \mathbb{R}$

$$\frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2} = \frac{\frac{2(e^x - 1)}{e^x + 1}}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2}$$

و لدينا :

$$\frac{2(e^x - 1)}{e^x + 1} \times \frac{(e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{2(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x} + 2e^x + 1 + e^{2x} - 2e^x + 1}$$

$$\frac{2(e^{2x} - 1)}{2(e^{2x} + 1)}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$= f(2x)$  و هو المطلوب .

نشاط 2

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$   $\rightarrow f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

بين أن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f(-x) + f(x) = 2$  ثم فسر النتيجة بيانيا .

الحل 2

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $(-x) \in \mathbb{R}$  و لدينا :

$$f(-x) + f(x) = \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$= \frac{e^{-x}(3 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$= \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{1 + e^x}$$

$$= \frac{3 - e^x + 3e^x - 1}{1 + e^x}$$

$$= \frac{2 + 2e^x}{1 + e^x}$$

$$= \frac{2(1 + e^x)}{1 + e^x}$$

$= 2$  و هو المطلوب

التفسير الهندسي :

$$f(-x) + f(x) = 2 \Rightarrow f(-x) = 2 - f(x)$$

$$\Rightarrow f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x)$$

إذن : النقطة ذات الإحداثيات  $(0; 1)$  مركز تناظر لمنحنى الدالة  $f$  .

حلل المعادلة  $f' = kf$

مبرهنة :

$k$  عدد حقيقي .

توجد دالة وحيدة  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و تحقق الشروط التالية :

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 1 & (1) \\ f'(x) &= k f(x) & (2) \end{aligned} \right\}$$

و هي معرفة بـ  $f(x) = e^{kx}$

نتيجة : الدوال غير المعدومة  $f$  و القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث من أجل كل عددين حقيقيين  $x, y$  :

نتيجة أساسية :  $f(x+y) = f(x) \times f(y)$  هي الدوال من الشكل :  $x \mapsto e^{kx}$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \mapsto ce^{kx}$  حيث  $c \in \mathbb{R}$  و  $k \in \mathbb{R}$  هي دالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة  $f'(x) = ck e^{kx}$

مثال : الدوال  $f$  القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث  $f'(x) = 2f(x)$  هي دوال من الشكل  $f(x) = ce^{2x}$  حيث  $c \in \mathbb{R}$  لأن :  $f'(x) = 2ce^{2x} = 2f(x)$

لكن حذار! من بين هذه الدوال توجد دالة وحيدة تحقق الشرط  $f(x) = a$  حيث  $a$  عدد حقيقي ثابت .

$$\text{مثلا : } f(1/2) = e^2 \quad \text{أي} \quad ce^{2(1/2)} = e^2$$

$$\text{أي : } c.e = e^2$$

$$\text{منه : } c = e^2/e = e$$

$$f(x) = e.e^{2x} = e^{2x+1} \quad \text{إن : الدالة المطلوبة هي}$$

تغيرات الدالة  $\exp$

الدالة  $\exp$  معرفة على  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

الدالة  $\exp$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :  $\exp'(x) = e^x$

إن : الدالة  $\exp$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  لأن  $e^x > 0$

منه : جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$			+	
$\exp(x)$		0	1	$+\infty$

نتائج : منحنى الدالة (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب في جوار  $-\infty$

الدالة  $\exp$  قابلة للاشتقاق عند 0 و  $\exp'(0) = e^0 = 1$

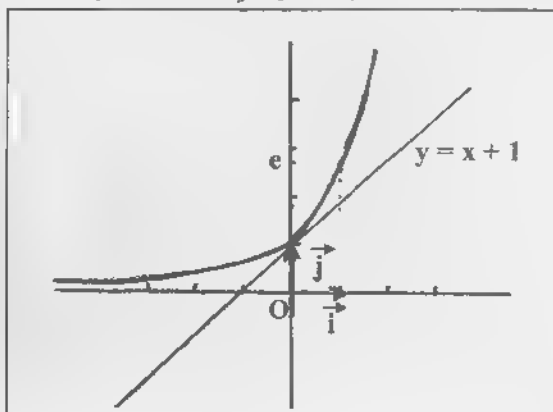
$$\exp'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{إن :}$$

معادلة مماس منحنى الدالة  $\exp$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل :  $y = 1(x - 0) + 1$  أي  $y = x + 1$

منه : أحسن تقريب تألفي للدالة  $\exp$  عند 0 هو الدالة  $x \mapsto x + 1$

منحنى الدالة  $\exp$



المعادلات و المتراجحات :

بما أن الدالة  $\exp$  متزايدة تماما فإن من أجل كل عددين حقيقيين

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \quad (1)$$

$$e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y \quad (2)$$

حذار! المعادلة  $e^x = y$  حيث  $y \leq 0$  لا تقبل حولا

في  $\mathbb{R}$  لأن  $e^x > 0$

أمثلة :

$$e^{2x} + 3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = -3 \quad -1$$

حولا في  $\mathbb{R}$

$$e^{-2x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-2x+1} = 1 \quad -2$$

$$\Leftrightarrow e^{-2x+1} = e^0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1/2$$

$$e^{-2x-1} - e^x < 0 \Leftrightarrow e^{-2x-1} < e^x \quad -3$$

$$\Leftrightarrow -2x - 1 < x$$

$$\Leftrightarrow -3x < 1$$

$$\Leftrightarrow x > -1/3$$

$$e^{2x} > 2 - e^x \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 > 0 \quad -4$$

لحل هذه المتراجحة نضع  $y = e^x$  بشرط  $y > 0$  لأن  $e^x > 0$

إذن : المتراجحة تكافئ  $y^2 + y - 2 > 0$  و  $y = e^x$

تكافئ  $(y+2)(y-1) > 0$  و  $y = e^x$

تكافئ  $(e^x + 2)(e^x - 1) > 0$

تكافئ  $e^x - 1 > 0$  لأن  $e^x + 2 > 0$

تكافئ  $e^x > 1$

تكافئ  $e^x > e^0$

تكافئ  $x > 0$

إذن : حلول المتراجحة هي المجال  $]0; +\infty[$

نشاط :

$f$  دالة معرفة بـ  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  و (C) منحناها في معط .

1 - أدرس تغيرات الدالة  $f$

2 - أكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) .

3 - أنشئ المنحنى (C)

الحل :

1 -  $f$  معرفة من أجل  $e^x - 1 \neq 0$  أي  $e^x \neq 1$  أي  $e^x \neq e^0$  أي  $x \neq 0$

منه :  $f$  معرفة على  $] -\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^0 + 1}{e^0 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = e^0 - 1 = 0 \quad \text{لاحظ أن}$$

إذن : لندرس إشارة  $e^x - 1$  كمايلي :

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq e^0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

منه :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y}$$

$$= -\infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^0 + 1}{e^0 - 1} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

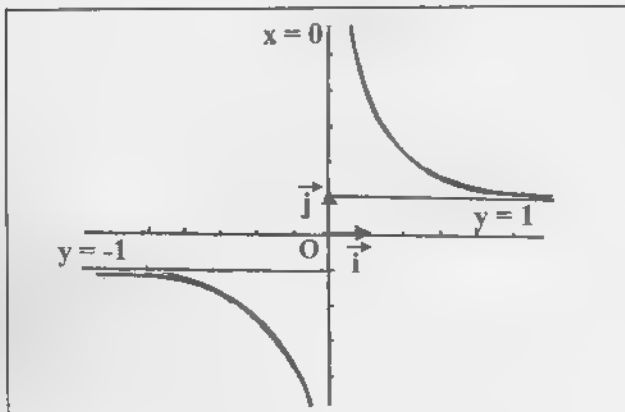
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} &= \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0 \quad \text{لأن} \quad = \frac{1+0}{1-0} \\ &= 1\end{aligned}$$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^*$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}\end{aligned}$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  :  $f'(x) < 0$  لأن  $-2e^x < 0$  و  $(e^x - 1)^2 > 0$  منه جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$-\infty$	$1$	$+\infty$



2- المستقيم ذو المعادلة  $x=0$  مقارب للمنحنى (C)

المستقيم ذو المعادلة  $y=-1$  مقارب للمنحنى (C) في جوار  $-\infty$   
المستقيم ذو المعادلة  $y=1$  مقارب للمنحنى (C) في جوار  $+\infty$

3- الإنشاء :

دراسة تغيرات الدالة  $x \mapsto e^{u(x)}$

لتكن  $u$  دالة معرفة على مجال  $I$  جزئي من  $\mathbb{R}$  و قابلة

للاشتقاق على  $I$  نعرف الدالة  $f$  بـ  $f(x) = e^{u(x)}$

تغيرات الدالة  $f$  :

$f$  معرفة على  $I$

النهايات : ليكن  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

لدينا النهايات التالية :

$\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x)$	$B \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} e^{u(x)}$	$e^B$	0	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{e^{x^2-1}} = \lim_{y \rightarrow -1/2} e^y = e^{-1/2} \quad \text{مثال :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{2} \quad \text{لأن}$$

الدالة المشتقة : الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  ودالتها المشتقة  $f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

إذن : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $u'(x)$

نشاط :

أدرس تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ  $f(x) = e^{\frac{x+1}{x^2-1}}$

الحل :

$f$  معرفة من أجل  $x^2 - 1 \neq 0$  أي  $x \notin \{-1; 1\}$   
 منه :  $f$  معرفة على  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{e^{x^2-1}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = e^0 = 1 \quad \text{إذن :} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{e^{x^2-1}} = \lim_{y \rightarrow -1/2} e^y = e^{-1/2} \quad \text{إذن :} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{e^{x^2-1}} = \lim_{y \rightarrow -1/2} e^y = e^{-1/2} \quad \text{إذن :} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{e^{x^2-1}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0 \quad \text{إذن :} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{e^{x^2-1}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty \quad \text{إذن :} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^{x^2-1}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = e^0 = 1 \quad \text{إذن :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$f$  قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x+1}{x^2-1} \right)' \times e^{\frac{x+1}{x^2-1}} \\ &= \frac{x^2-1-2x(x+1)}{(x^2-1)^2} \times e^{\frac{x+1}{x^2-1}} \\ &= \frac{-x^2-2x-1}{(x^2-1)^2} \times e^{\frac{x+1}{x^2-1}} \end{aligned}$$

إذن : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $-x^2-2x-1$  لأن  $e^{\frac{x+1}{x^2-1}} > 0$  و  $(x^2-1)^2 > 0$

إذن : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $-(x^2+2x+1)$  أي  $-(x+1)^2$  كمايلي :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$-(x+1)^2$	-	0	-

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-	-
$f(x)$	1	$e^{-1/2}$	0	$+\infty$

منه جدول تغيرات الدالة f :

## II . الدالة اللوغارتمية النيبيرية

تمهيد : الدالة  $\exp$  متزايدة، تماما على  $\mathbb{R}$  و تأخذ قيمها على المجال  $]0; +\infty[$   
إذن : حسب مرهنة القيم لمتوسطة فإن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $a$  يوجد عدد حقيقي وحيد  $b$  يحقق  $e^b = a$   
هذا العدد  $b$  يسمى اللوغاريتم النيبيري للعدد الحقيقي الموجب  $a$

$$b = \ln(a) \Leftrightarrow \begin{cases} e^b = a \\ a > 0 \end{cases} \text{ و نرسم له } \ln(a) \text{ إذن : } e^b = a$$

$$\text{مثلا : } e^b = 3 \Rightarrow b = \ln(3) \text{ لأن } 3 > 0$$

تعريف :

نسمي دالة لوغارتمية نيبيرية الدالة التي نرسم لها بالرمز  $\ln$  و المعرفة على  $]0; +\infty[$   $x \mapsto \ln x$  نتائج مباشرة :

$$1 - \text{من أجل كل } x \text{ من } ]0; +\infty[ \text{ فإن : } \ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$$

$$2 - \text{من أجل كل } x \text{ من } ]0; +\infty[ \text{ فإن : } e^{\ln(x)} = x$$

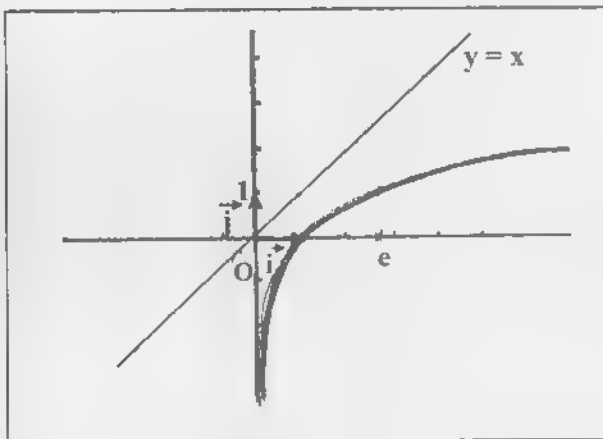
$$3 - \text{من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ فإن : } \ln(e^x) = x$$

$$4 - e^0 = 1 \text{ إذن : } \ln(1) = 0$$

$$5 - e^1 = e \text{ إذن : } \ln(e) = 1$$

خاصية :

منحني الدالتين  $\ln$  و  $\exp$  في معلم متعامد و متجانس متناظران بالنسبة إلى المستقيم المنصف الأول ذو المعادلة  $y = x$ .  
منه : منحنى الدالة  $\ln$  كما يلي :



ملاحظة : تم رسم هذا المنحنى باستعمال الخاصية السابقة أي برسم نظير منحنى الدالة  $\exp$  بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة  $y = x$   
نتائج : من المنحنى الممثل لدالة  $\ln$  نستنتج مايلي :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$$x \geq 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

خواص جبرية :

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما  $a, b$  ، من أجل كل عدد صحيح نسبي  $n$  :

$$(1) \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$(2) \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b) \text{ إذن : } \ln(1/a) = -\ln(a)$$

$$(3) \ln(a^n) = n \ln(a) \text{ منه } \ln(\sqrt[n]{a}) = \ln(a^{1/n}) = \frac{1}{n} \ln(a)$$

المعادلات و المتراجحات :

بما أن الدالة  $\ln$  متزايدة تماما على  $]0; +\infty[$  (حسب المنحنى) فإن :

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما  $x$  و  $y$  لدينا :

$$(1) \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$(2) \ln(x) \geq \ln(y) \Leftrightarrow x \geq y$$

نتائج : حسب الخاصية (1) فإن  $\ln(x) = \ln(1) \Leftrightarrow \ln(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

حسب الخاصية (2)  $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(1)$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$



x	0	1	$+\infty$
ln(x)	-	0	+

منه جدول إشارة العدد  $\ln(x)$  كما يلي :**نشاط 1**عين مجموعات تعريف الدوال التالية : (1)  $f(x) = \ln(x+1)$ 

(2)  $g(x) = \ln(x^2)$

(3)  $h(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

**الحل 1**1 - معرفة من أجل  $x+1 > 0$  أي  $x > -1$ إذن : f معرفة على  $]-1; +\infty[$ 2 - معرفة من أجل  $x^2 > 0$  أي  $x \neq 0$ إذن : g معرفة على  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ 3 - معرفة من أجل  $x^2 - 3x + 2 > 0$ لندرس إشارة  $x^2 - 3x + 2$  كمايلي :  $\Delta = 9 - 8 = 1$ 

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+

إذن :  $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$ أي h معرفة على  $]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$ **نشاط 2**

حل في IR المعادلات و التراجعات التالية :

(3)  $\ln(x+2) \leq 5$

(1)  $\ln(x+1) \geq -3$

(4)  $\ln(x^2+1) = \ln(x)$

(2)  $\ln(2x-1) = 2$

**الحل 2**

(1)  $\ln(x+1) \geq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \geq e^{-3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \geq e^{-3} - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{-3} - 1 \quad \text{إذن مجموعة الحلول هي المجال } [e^{-3} - 1; +\infty[$$

(2)  $\ln(2x-1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 2x-1 = e^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1/2 \\ 2x = e^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1/2 \\ x = \frac{1}{2}(e^2 + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^2 + 1) \quad \text{إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا } \left\{ \frac{e^2 + 1}{2} \right\}$$

(3)  $\ln(x+2) < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ x+2 \leq e^5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \leq e^5 - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-2; e^5 - 2]$$

$$(4) \text{ دائما محقق } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 + 1 = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

نحل المعادلة (1) في المجال  $]0; +\infty[$

إذن المعادلة لا تقبل حولا .  $\Delta = 1 - 4 < 0$

نتيجة : المعادلة  $\ln(x^2 + 1) = \ln x$  لا تقبل حولا في IR .

نشاط - 3

حل في IR المتراجحة  $\ln(x^2 - 1) \leq \ln(x)$

الحل - 3

$$\ln(x^2 - 1) \leq \ln(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 1 \leq x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[ \\ x \in ]0; +\infty[ \\ x^2 - 1 - x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]1; +\infty[ & (1) \\ x^2 - 1 - x \leq 0 & (2) \end{cases}$$

لندرس إشارة كثير الحدود :  $x^2 - x - 1$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

منه :

x	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$x^2 - x - 1$	+	0	0	+

$$x^2 - 1 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right] \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{cases} x \in ]1; +\infty[ \\ x \in \left[ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right] \end{cases} \quad \text{منه : الشروط (1) و (2) تصح :}$$

$$\text{أي : } x \in \left] 1; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right] \text{ و هي حلول المتراجحة المطلوبة .}$$

نشاط - 4

حل في IR المعادلات التالية :

$$\ln(x - 1)(x + 2) = 2 \ln(2) \quad (1)$$

$$\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 2 \ln(2) \quad (2)$$

$$2[\ln(x)]^2 + \ln(x) - 6 = 0 \quad (3)$$

الحل - 4

$$\ln(x - 1)(x + 2) = 2 \ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x + 2) > 0 \\ \ln(x - 1)(x + 2) = \ln(2^2) \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty; -2[ \cup ]1; +\infty[ \\ (x - 1)(x + 2) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty; -2[ \cup ]1; +\infty[ \\ x^2 + x - 6 = 0 \dots\dots\dots (\alpha) \end{cases} \\
 & \text{حل المعادلة } (\alpha) \quad x^2 + x - 6 = 0 \\
 & \Delta = 1 + 24 = 25 \\
 & \begin{cases} x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

منه :

$$\ln(x-1)(x+2) = 2 \ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty; -2[ \cup ]1; +\infty[ \\ x \in \{2; -3\} \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \text{إذن : المعادلة تقبل حلين هما } (2) \text{ و } (-3)$$

$$\begin{aligned}
 \ln(x-1) + \ln(x+2) &= 2 \ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \\ \ln(x-1)(x+2) = \ln(2^2) \end{cases} \quad (2) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > +1 \\ (x-1)(x+2) = 4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]1; +\infty[ \\ x \in \{2; -3\} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$(2) \Leftrightarrow \text{إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا هو } (2)$$

$$2[\ln(x)]^2 + \ln(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = \ln(x) \\ 2y^2 + y - 6 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{لنحل في IR المعادلة } 2y^2 + y - 6 = 0 \text{ كمايلي :}$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$\text{إذن : } \begin{cases} y_1 = \frac{-1+7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ y_2 = \frac{-1-7}{4} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x > 0 \\ x = e^{3/2} \\ \text{أو} \\ x = e^{-2} \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x > 0 \\ 3/2 = \ln(x) \\ \text{أو} \\ -2 = \ln(x) \end{cases} \quad \text{منه المعادلة تكافئ}
 \end{aligned}$$

$$\{e^{-2}; e^{3/2}\} \quad \text{إذن : المعادلة تقبل حلين :}$$

النشاط - 5

$$\ln(x-1)(x+2) \leq 2 \ln(2) \quad \text{المترابحة : حل في IR}$$

الحل - 5

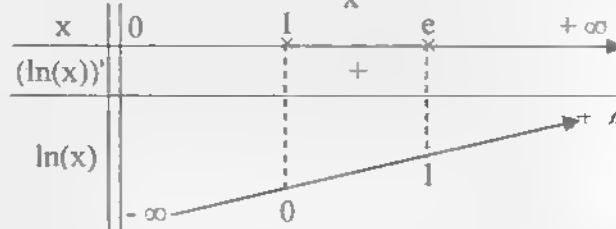
$$\begin{aligned}
 \ln(x-1)(x+2) &\leq 2 \ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) > 0 \\ \ln(x-1)(x+2) \leq \ln(4) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty; -2[ \cup ]1; +\infty[ \\ (x-1)(x+2) \leq 4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty; -2[ \cup ]1; +\infty[ \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty; -2[ \cup ]1; +\infty[ \\ x \in [-3; 2] \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$x \in [-3; -2] \cup [1; 2] \Leftrightarrow \text{و هي حلول المترابحة .}$$

دراسة تغيرات الدالة  $\ln$

الدالة  $\ln$  مستمرة وقابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و دالتها المشتقة هي الدالة المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ  $x \mapsto \frac{1}{x}$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  فإن  $\frac{1}{x} > 0$  منه الدالة  $\ln$  متزايدة تماما على  $]0; +\infty[$   
جدول التغيرات :



لاحظ أن قيمة العدد المشتق للدالة  $\ln$  عند 1 هو  $1/1 = 1$

منه : تعريفا  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$  أي  $(\ln(1))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = 1$

منه : معادلة مماس منحنى الدالة  $\ln$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 تكتب من الشكل :  $y = x - 1$

إذن : أحسن تقريب تألفي للدالة  $\ln$  عند 1 هو الدالة  $x \mapsto x - 1$

نشاط 6

أدرس تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ  $f(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x)$  ثم أرسم منحنائها

الحل 6

$f$  معرفة من أجل  $x > 0$  إذن :  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(x)]^2 - \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{لأن} \quad = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) [\ln(x) - 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{لأن} \quad = +\infty$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2 \times (\ln(x))' \times \ln(x) - (\ln(x))'$$

$$= \frac{2}{x} \ln(x) - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} [2 \ln(x) - 1]$$

إشارة  $f'(x)$  على  $]0; +\infty[$  هي إشارة الجداء  $(2 \ln x - 1)$  كمايلي :

$$2 \ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \ln x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq 1/2$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln(e^{1/2})$$

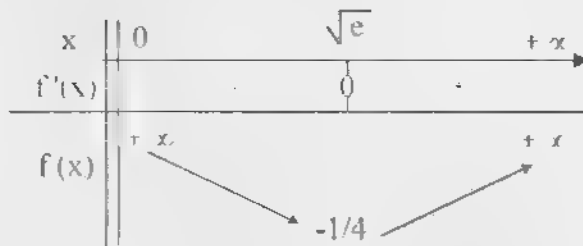
$$\Leftrightarrow x \geq e^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$$

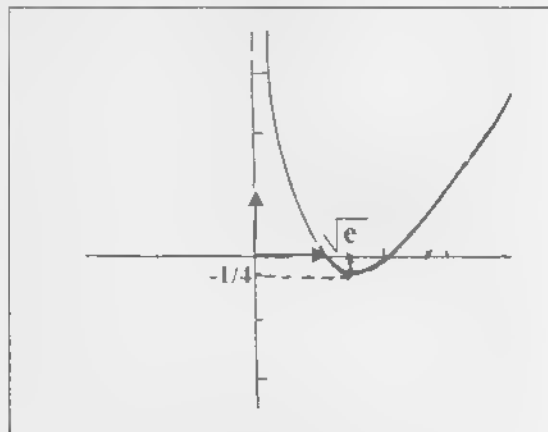
منه : جدول الإشارة التالي :

$x$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$1/x$		+	
$2 \ln x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+

إذن : جدول التعابير :



$$f(\sqrt{e}) = (\ln \sqrt{e})^2 \quad \ln(\sqrt{e}) = (1/2)^2 - 1/2 = -1/4$$



الإثبات :

## III. الدالة اللوغاريتم العشري log

تعريف : نسمي دالة لوغاريتم عشري الدالة التي نرمز لها بـ log و المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ  $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

خواص الدالة log

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a ؛ b و من أجل كل عدد صحيح نسبي n :

$$\log(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1 \quad (1)$$

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b) \quad (2)$$

$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b) \quad (3)$$

$$\log(10^n) = n \log(10) = n \quad \text{إذن} \quad \log(a^n) = n \log(a) \quad (4)$$

نتيجة هامة :

إذا كان x عدد حقيقي يحقق  $10^n < x < 10^{n+1}$  فإن  $n \leq \log(x) \leq n+1$  لأن الدالة log متزايدة ناما على  $]0; +\infty[$

نشاط - 7

حل في  $\mathbb{R}^*$  المعادلات و المتراجحات التالية :

$$\log(x) = 2 \quad (1)$$

$$\log(x) \leq -4 \quad (2)$$

$$\log(x) > 3 \quad (3)$$

الحل - 7

في كل المعادلات و المتراجحات  $x > 0$  لأن الدالة log معرفة على  $]0; +\infty[$

$$\log(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = 2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 2 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln 100$$

$$\Leftrightarrow x = 100$$

$$\log(x) < -4 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)} + 4 \leq 0 \quad -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x) + 4 \ln(10)}{\ln(10)} < 0$$

$$\ln 10 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) + \ln(10^4) < 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq -\ln 10^4$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \ln(10^{-4})$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 10^{-4}$$

$$\log(x) > 3 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)} > 3 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) > 3 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) > \ln(10^3)$$

$$\Leftrightarrow x > 10^3$$

دراسة تغيرات الدالة  $\ln \circ u$

$u$  دالة عددية معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $I$  جزئي من  $\mathbb{R}$

نعرف الدالة  $f$  كمايلي :  $f: x \mapsto \ln(u(x))$

تغيرات الدالة  $f$  :

$f$  معرفة من أجل  $u(x) > 0$  مع  $x \in I$

إذا كان  $\alpha$  عنصر من المجموعة  $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$  فإن :

$\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x)$	$0^+$	$+\infty$	$B \in ]0; +\infty[$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \ln(u(x))$	$-\infty$	$+\infty$	$\ln(B)$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :  $f'(x) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)}$

ن : إشارة  $f'(x)$  على مجموعه تعريف الدالة  $f$  هي إشارة  $u'(x)$  لأن  $u(x) > 0$  حسب مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

مثال : أدرس تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ  $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

الحل :

$f$  معرفة من أجل :  $\frac{x^2+1}{x^2-1} > 0$

لندرس إشارة  $\frac{x^2+1}{x^2-1}$  كمايلي

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$x^2+1$				
$x^2-1$	+	0	0	+
$\frac{x^2+1}{x^2-1}$	+	-	-	-

إذن :  $\frac{x^2+1}{x^2-1} > 0$  من أجل  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

مع  $f$  معرفة على  $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1) = 0 \quad \text{منه} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln(y) = +\infty \quad \text{منه} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1+y}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln(y) = +\infty \quad \text{منه} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1+y}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 1} \ln(y) - \ln(1) = 0 \quad \text{منه} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$f$  قابلة للاسقف على  $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

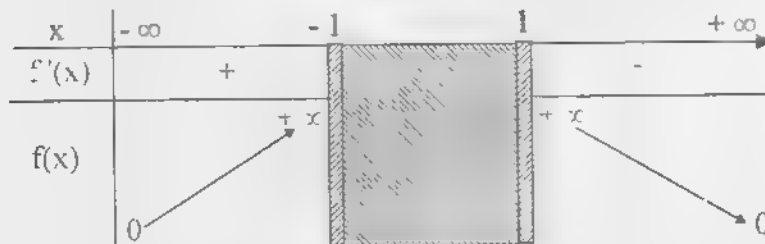
$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \times \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

نرى :  $f'(x)$  من إشارة  $-4x$  لأن  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0$  و  $(x^2 - 1)^2 > 0$



منه : جدول تغيرات الدالة  $f$  :



### نشاط 8

$f$  دالة معرفة على  $]-2; +\infty[$  بـ  $f(x) = \ln(x+2)$  و  $(C)$  منحناها في معلم متعامد و متجانس . عين فاصلة النقطة التي يكون فيها مماس المنحنى  $(C)$  يوازي المستقيم ذو المعادلة  $y = x$

### الحل 8

$f$  قابلة للاشتقاق على  $]-2; +\infty[$  و دالتها المشتقة :  $f'(x) = \frac{1}{x+2}$

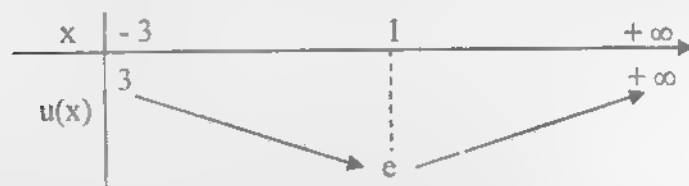
يكون المماس عند النقطة ذات الفاصلة  $x$  يوازي المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  إذا و فقط إذا كان معامل توجيهه 1 أي  $f'(x) = 1$

$$\frac{1}{x+2} = 1 \quad \text{أي} \quad x+2 = 1$$

منه :  $x = -1$  أي نقطة المماس لها الإحداثيات  $(-1; f(-1))$  أي  $(-1; 0)$

### نشاط 9

إليك جدول تغيرات دالة  $u$  على المجال  $]-3; +\infty[$



المطلوب : إستنتج جدول تغيرات الدالة  $f$  المعرفة على  $]-3; +\infty[$  بـ  $f(x) = \ln(u(x))$

### الحل 9

لاحظ أن من أجل كل  $x$  من  $]-3; +\infty[$  فإن  $u(x) > 0$  إذن :  $f$  معرفة على  $]-3; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \ln 3 \quad \text{إذن :} \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} u(x) = 3$$

$$f(1) = \ln(e) = 1 \quad \text{إذن :} \quad u(1) = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty \quad \text{إذن :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$$

إشارة  $f'(x)$  على  $]-3; +\infty[$  هي إشارة  $u'(x)$  أي  $f$  لها نفس اتجاه تغير الدالة  $u$  على المجال  $]-3; +\infty[$  كما يلي :

$x$	$-3$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	$\ln 3$	$1$	$+\infty$

دراسة الدالة  $x \mapsto e^{-\lambda x}$  حيث  $\lambda > 0$

ليكن  $\lambda > 0$  نعرف الدالة  $f(x) = e^{-\lambda x}$  على  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\lambda x = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\lambda x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $f'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$  إذن  $f'(x) < 0$

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	$+\infty$	$1$	$0$

دراسة الدالة  $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$  حيث  $\lambda > 0$

ليكن  $\lambda > 0$  نعرف الدالة  $f(x) = e^{-\lambda x^2}$  على  $\mathbb{R}$  سمي  $f(x)$  (I) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\lambda x^2 = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x^2 = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $f'(x) = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$  إذن  $f'(x)$  من إشارة  $-x$

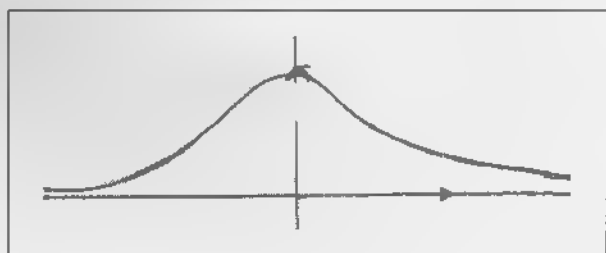
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$-x$	$+$	$0$	$-$

منه : جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$0$	$1$	$0$

ملاحظة : المنحنيات  $(\Gamma_\lambda)$  سمي منحنيات Gauss و هي على شكل ناقوس . تسعمل خاصة في الاحتمالات و الإحصاء و

الأكثر استعمالا هو  $(\Gamma_{0.5})$  ذو المعادلة  $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$  الإنشاء :



المعادلات التفاضلية من الشكل  $y' = ay + b$

البحث عن حلول المعادلة التفاضلية  $y' = ay + b$  ذات المجهول

$y$  هو البحث عن الدوال العددية من الشكل  $y = f(x)$

و التي تحقق الشروط التالية :



(1) f قابلة للاستيفاق

$$f'(x) = a f(x) + b \quad (2)$$

ملاحظة : a و b عددين حقيقيين .

غالبا المعادلة  $y' = a y + b$  يكتب من الشكل  $\frac{dy}{dx} = a y + b$  مبرهنة :

a ≠ 0 عددين حقيقيين حيث

حلول المعادلة التفاضلية  $y' = a y + b$  في المجموعة IR هي الدوال f من الشكل  $f(x) = c e^{ax} - b/a$  حيث c عدد حقيقي ثابت .

مثال : حل في IR المعادلة التفاضلية  $y' - 2y = 3$ 

$$\text{الحل : } y' - 2y = 3 \Leftrightarrow y' - 2y + 3 = 0$$

من الحلول هي الدوال 1 حيث  $(b=3; a=2) f: x \mapsto c e^{2x} - \frac{3}{2}$

$$f(x) = c e^{2x} - \frac{3}{2} \quad \text{ليكن}$$

$$f'(x) = 2 c e^{2x} \quad \text{اذا :}$$

$$f'(x) - 2 f(x) = 2 c e^{2x} - 2 \left( c e^{2x} - \frac{3}{2} \right) \quad \text{منه}$$

$$2 c e^{2x} - 2 c e^{2x} + 3$$

$$y' - 2y = 3 \quad \text{اذا فعلا الدالة f هي حل للمعادلة}$$

حالة خاصة : b = 0

حلول المعادلة  $y' = a y$  هي الدوال f حيث  $f(x) = c e^{ax}$  حيث c عدد حقيقي ثابت .  
الدالتان تجب و جيب الزائديتان

نسمي الدالة تجب الزائدية و الدالة جيب الزائدية الدالتين المعرفتين على IR على الترتيب ch و sh و المعرفتين كمايلي :

$$\text{شباط - 9} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ; \quad \text{Ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1 - أثبت أن الدالة ch زوجية .

2 - أدرس تغيرات الدالة ch على المجال  $]0; +\infty[$ 

3 - استنتج جدول تغيرات الدالة ch على IR

4 - أثبت أن الدالة sh فردية .

5 - أدرس تغيرات الدالة sh على المجال  $]0; +\infty[$ 

6 - استنتج جدول تغيرات الدالة sh على IR

ليكن (C<sub>1</sub>) منحنى الدالة c، في معلم متعامد ومتجانس و (C<sub>2</sub>) منحنى الدالة sh في نفس المعلم

7 - أدرس الأوضاع النسبية لـ (C<sub>1</sub>) و (C<sub>2</sub>)

8 - أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [ch(x) - sh(x)]$  فسر النهاية هندسيا .

الحل - 9

$$1 - \text{من أجل كل } x \text{ من IR فإن } (-x) \in \text{IR} \quad \text{و} \quad ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2}$$

إذن :  $ch(-x) = ch(x)$  منه الدالة ch زوجية .

2 - التغيرات على المجال  $]0; +\infty[$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} ch(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

الدالة ch قابل للاستيفاق على IR و دالتها المشتقة :

$$ch'(x) = \frac{1}{2} (-e^{-x} + e^x) = \frac{1}{2} \left( e^x - \frac{1}{e^x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \right)$$

اذا : إشارة  $ch'(x)$  هي إشارة  $e^{2x} - 1$  كمايلي :  
$$e^{2x} - 1 = (e^x + 1)(e^x - 1)$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$e^x + 1$		$+$	
$e^x - 1$	$-$	$0$	$+$
$(e^x + 1)(e^x - 1)$	$-$	$0$	$+$

3 - منه جدول تغيرات الدالة  $ch$  على  $IR$  : الدالة زوجية إذن : نستنتج الجزء على المجال  $]-\infty ; 0[$  (بالتناظر)

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$ch'(x)$	$-$	$0$	$+$
$ch(x)$	$+\infty$	$1$	$+\infty$

4 - من أجل كل  $x$  من  $IR$  فإن  $(-x) \in IR$  و  

$$sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{2}$$

إذن :  $sh(-x) = -sh(x)$  منه الدالة  $sh$  فردية .

5 - تغيرات الدالة  $sh$  على  $]-\infty ; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$

الدالة  $sh$  قابل للاشتقاق على  $IR$  و دالتها المشتقة هي :

$$sh'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = ch(x)$$

و حسب السؤال (3) فإن  $ch(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $IR$  .

إذن جدول تغيرات الدالة  $sh$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$sh'(x)$		$+$	
$sh(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

6 - الوضع النسبي لـ  $(C_1)$  و  $(C_2)$  :

$$ch(x) - sh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= e^{-x} > 0$$

إذن : المنحنى  $(C_1)$  يقع دائما فوق المنحنى  $(C_2)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [ch(x) - sh(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

7 -

التفسير الهندسي : لما  $x$  يؤول إلى  $+\infty$  فإن المنحنيان  $(C_1)$  و  $(C_2)$  متجاوران نقول أنهما متقاربان .

## تمارين الكتاب المدرسي

## التمرين 1 =

بسط العبارات التالية :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} \quad (3)$$

$$\frac{e^{2x+3}}{e^{-2x}} \quad (2)$$

$$(e^x)^3 \times e^{-5x} \quad (1)$$

## الحل 1 =

$$(e^x)^3 \times e^{-5x} = e^{3x} \times e^{-5x} = e^{3x-5x} = e^{-2x} \quad (1)$$

$$\frac{e^{2x+3}}{e^{-2x}} = e^{2x+3+2x} = e^{4x+3} \quad (2)$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} = \frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{e^{2x}} = e^{x-2x} + e^{-x-2x} = e^{-x} + e^{-3x} \quad (3)$$

## التمرين 2 =

بين صحة كل من المساواة التالية :

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \quad (2)$$

$$\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (1)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (4)$$

$$(e^x + e^{-x})^2 = \frac{(e^{2x} + 1)^2}{e^{2x}} \quad (3)$$

## الحل 2 =

$$e^{-2x} e^{2x} = e^0 = 1 \quad \text{لأن} \quad \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{-2x}(e^{2x} - 1)}{e^{-2x}(e^{2x} + 1)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (1)$$

$$e^{-x} - e^{-2x} = e^{-2x}(e^x - 1) = \frac{1}{e^{2x}}(e^x - 1) = \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \quad (2)$$

$$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{-2x}(e^{4x} + 2e^{2x} + 1) = \frac{(e^{2x} + 1)^2}{e^{2x}} \quad (3)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (4)$$

## التمرين 3 =

$u_n = \frac{e^{n-1}}{e^n}$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ  $u_n = \frac{e^{n-1}}{e^n}$ .  
بين أن  $(u_n)$  متتالية ثابتة .

## الحل 3 =

$$u_{n+1} - u_n = \frac{e^{n+1-1}}{e^{n+1}} - \frac{e^{n-1}}{e^n}$$

ليكن  $n \in \mathbb{N}$ 

$$\frac{e^n}{e^{n+1}} - \frac{e^{n-1}}{e^n}$$

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{e}$$

إذن :  $(u_n)$  ثابتةملاحظة : يمكن إثبات ذلك مباشرة من عبارة  $u_n$  كمايلي :

من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  لدينا :  $u_n = \frac{e^{n-1}}{e^n} = \frac{1}{e}$  إذن :  $(u_n)$  ثابتة .

## التمرين 4 -

حل في IR المعادلات التالية :

$$e^{2x} = 1 \quad (1)$$

$$e^{-5x} = e \quad (2)$$

$$e^x = e^{2x} \quad (3)$$

## الحل 4 -

$$e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$e^{-5x} = e \Leftrightarrow e^{-5x} = e^1 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow -5x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -1/5$$

$$e^x = e^{2x} \Leftrightarrow x = 2x \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

## التمرين 5 -

حل في IR المعادلات التالية :

$$e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0 \quad (5)$$

$$e^{x^2} = e^{-3(x+1)} \quad (3)$$

$$e^{-x^2} = 1/e \quad (1)$$

$$e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{1/x} \quad (4)$$

$$e^{x+3} = e^{4/x} \quad (2)$$

## الحل 5 -

$$e^{-x^2} = 1/e \Leftrightarrow e^{-x^2} = e^{-1} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow -x^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$e^{x+3} = e^{4/x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x+3 = \frac{4}{x} \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (x+4)(x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x = 1 \text{ أو } x = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1; -4\}$$

$$e^{x^2} = e^{-3(x+1)} \Leftrightarrow x^2 = -3(x+1) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 = 0$$

نحل المعادلة  $x^2 + 3x + 3 = 0$  كمايلي :  $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$  إذن لا تقبل حلول في R

نتيجة : المعادلة  $e^{x^2} = e^{-3(x+1)}$  لا تقبل حلول في R .

$$e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{1/x} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x \neq 0 \\ x \neq 0 \\ \frac{x+4}{6-x} = \frac{1}{x} \end{cases} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 6 \\ x \neq 0 \\ x^2 + 4x - 6 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{0; 6\} \\ (x+6)(x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{0; 6\} \\ x \in \{1; -6\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1; -6\}$$

$$e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^{3x} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 3x$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

التمرين 6 =

حل في IR المتراجحات التالية :

$$\begin{aligned} e^{x+1} &> e^{-2/x} & (5) & e^{3x} \leq 1 & (1) \\ e^{x^2} &> (e^3)^4 e^{-x} & (6) & e^x > e^2 & (2) \\ e^{x-x^2} &\geq 1 & (7) & e^x < e^{-2x} & (3) \\ (e^x - 1)(e^x - e^2) &< 0 & (8) & e^{2x^2} \leq e^{5x+3} & (4) \end{aligned}$$

الحل 6 =

$$e^{3x} \leq 1 \Leftrightarrow e^{3x} \leq e^0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 0 \quad \text{إذن : مجموعة الحلول هي المجال } ]-\infty; 0]$$

$$e^x > e^2 \Leftrightarrow x > 2 \quad (2) \quad \text{إذن : مجموعة الحلول هي } ]2; +\infty[$$

$$e^x < e^{-2x} \Leftrightarrow x < -2x \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow 3x < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \quad \text{إذن : مجموعة الحلول هي } ]-\infty; 0[$$

$$e^{2x^2} \leq e^{5x+3} \Leftrightarrow 2x^2 \leq 5x + 3 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 \leq 0$$

لندرس إشارة كثير الحدود  $2x^2 - 5x - 3$  كما يلي :

$$\Delta = 25 + 24 = 49$$

x	$-\infty$	-1/2	3	$+\infty$
$2x^2 - 5x - 3$	+	0	0	+

$$\text{منه } \begin{cases} x_1 = \frac{5+7}{4} = 3 \\ x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

إذن حلول المتراجحة  $e^{2x^2} \leq e^{5x+3}$  هي  $[-1/2; 3]$

$$e^{x+1} > e^{-2/x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x+1 > -2/x \end{cases} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x+1 + 2/x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x^2 + x + 2}{x} > 0 \end{cases}$$

لندرس إشارة الجداء  $x(x^2 + x + 2)$  كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$x^2 + x + 2$	+	+	+
$x^2 + x + 2$	-	+	+
x			

منه حلول المترابحة هي المجال :  $]0 ; +\infty[$

$$e^{x^2} > (e^3)^4 e^{-x} \Leftrightarrow e^{x^2} > e^{12-x} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 12-x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-3) > 0$$

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$	
$(x+4)(x-3)$		+	0	-	0	+

و هي مجموعة الحلول .  $x \in ]-\infty ; -4[ \cup ]3 ; +\infty[$

$$e^{x-x^2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x-x^2} \geq e^0 \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow x-x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(1-x) \geq 0$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$	
$x(1-x)$		-	0	+	0	-

و هي مجموعة الحلول  $x \in [0 ; 1]$

$$(e^x - 1)(e^x - e^2) < 0 \quad (8)$$

لندرس إشارة كل من  $(e^x - 1)$  ثم  $(e^x - e^2)$  كمايلي :

x	$-\infty$	0		$+\infty$
$e^x - 1$		-	0	+

إذن :  $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$	2		$+\infty$
$e^x - e^2$		-	0	+

إذن :  $e^x - e^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^2 \Leftrightarrow x \geq 2$

خلاصة : إشارة الجداء  $(e^x - 1)(e^x - e^2)$  :

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$	
$e^x - 1$		-	0	+		
$e^x - e^2$			-	0	+	
$(e^x - 1)(e^x - e^2)$		+	0	-	0	+

أخيرا : حلول المترابحة  $(e^x - 1)(e^x - e^2) < 0$  هي المجال  $]0 ; 2[$

#### التمرين 7

في كل من الحالات التالية عيّن الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على IR و التي تحقق الشروط المطلوبة :

$$f(0) = 1 \text{ و } f' = 3f \quad (1)$$

$$f(0) = 1 \text{ و } f' = -f \quad (2)$$

$$f(0) = 1 \text{ و } f' = \frac{1}{2}f \quad (3)$$

#### الحل 7

$$f : x \mapsto e^{3x} \quad \text{إذن : } \begin{cases} f' = 3f \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$f : x \mapsto e^{-x} \quad \text{إذن : } \begin{cases} f' = -f \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f : x \mapsto e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{إذن : } \begin{cases} f' = \frac{1}{2}f \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

#### التمرين 8

f دالة قابلة للاشتقاق على IR حيث  $f' = kf$  و  $f(0) = \lambda$  مع  $\lambda$  و k عددين حقيقيين حيث  $\lambda \neq 0$

لتكن g دالة معرفة على IR بـ  $g = \frac{1}{\lambda}f$

1 - تحقق أن  $g' = kg$  و  $g(0) = 1$

2 - استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x فإن  $f(x) = \lambda e^{kx}$

الحل - 8

$$1 - \text{لدينا من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : g(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$$

$$\text{اذن : من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : g'(x) = \frac{1}{\lambda} f'(x)$$

$$\text{لكن } f'(x) = k f(x) \text{ اذن : } g'(x) = \frac{1}{\lambda} (k f(x))$$

$$\text{أي : } g'(x) = k \times \frac{1}{\lambda} f(x) \text{ منه } g'(x) = k g(x)$$

$$\text{أي : } g' = k \cdot g \text{ و هو المطلوب .}$$

$$\text{لدينا : } g(0) = \frac{1}{\lambda} f(0) \text{ أي } g(0) = \frac{1}{\lambda} (\lambda) \text{ أي } g(0) = 1$$

$$2 - \text{حسب السؤال (1) فإن } \begin{cases} g' = k g \\ g(0) = 1 \end{cases} \text{ إذن : } g: x \mapsto e^{kx}$$

$$\text{من جهة أخرى لدينا : } g(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) \text{ إذن : } \lambda g(x) = f(x)$$

$$\text{أي : } f(x) = \lambda g(x)$$

$$\text{أي : } f(x) = \lambda e^{kx} \text{ و هو المطلوب .}$$

التمرين - 9

في كل من الحالات التالية عين الدالة الوحيدة  $f$  القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث :

$$(1) \quad f' = -6f \quad \text{و} \quad f(0) = -1$$

$$(2) \quad f' = -2f \quad \text{و} \quad f(0) = 1/2$$

$$(3) \quad f' = \sqrt{2}f \quad \text{و} \quad f(0) = 2$$

الحل - 9

$$(1) \quad \begin{cases} f' = -6f \\ f(0) = -1 \end{cases} \text{ إذن : } f: x \mapsto -e^{-6x}$$

$$(2) \quad \begin{cases} f' = -2f \\ f(0) = 1/2 \end{cases} \text{ إذن : } f: x \mapsto \frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$(3) \quad \begin{cases} f' = \sqrt{2}f \\ f(0) = 2 \end{cases} \text{ إذن : } f: x \mapsto 2 e^{\sqrt{2}x}$$

التمرين - 10

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  و غير معدومة حيث من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  :  $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

$$1 - \text{بين أن } f(0) = 1$$

$$2 - \text{بين أن من أجل كل عدد حقيقي } x : f(x) \times f(-x) = 1$$

$$3 - \text{بين أن من أجل كل عدد حقيقي } x : f(x/2) \times f(x/2) = f(x)$$

$$4 - \text{استنتج إشارة } f(x) \text{ على } \mathbb{R}$$

الحل - 10

$$1 - \text{من أجل } y=0 \text{ نحصل على : من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : f(x+0) = f(x) \times f(0)$$

$$\text{أي : } f(x) = f(x) \times f(0)$$

$$\text{أي : } f(0) = \frac{f(x)}{f(x)} = 1 \text{ لأن } f(x) \neq 0$$

$$2 - \text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ لدينا :}$$

$$2 - \text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ لدينا :}$$

$$f(x-x) = f(0) \Leftrightarrow f(x-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x+(-x)) = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) \times f(-x) = 1 \text{ لأن } f(x+(-x)) = f(x) \times f(-x) \text{ و هو المطلوب .}$$

3 - من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن :

$$f(x/2) \times f(x/2) = f(x/2 + x/2) \Leftrightarrow f(x/2) \times f(x/2) = f(x)$$

4 - لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = [f(x/2)]^2$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f(x) \geq 0$

لكن :  $f$  غير معدومة إذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f(x) > 0$

### التمرين 11

$f$  دالة معرفة و موجبة على  $\mathbb{R}$  حيث من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  :  $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

1 - عين  $f(2x)$  :  $f(3x)$  :  $f(4x)$  بدلالة  $f(x)$

2 - استنتج عبارة  $f(nx)$  بدلالة  $f(x)$  من أجل  $n \in \mathbb{N}^*$

نضع  $f(1) = k$  حيث  $k > 0$

3 - بين أن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  فإن :  $f(n) = k^n$  و  $[f(1/n)]^n = k$

4 - استنتج  $f(1/2)$  و  $f(1/4)$  بدلالة  $k$ .

### الحل 11

$$f(2x) = f(x+x) = f(x) \times f(x) = [f(x)]^2 \quad - 1$$

$$f(3x) = f(x+2x) = f(x) \times f(2x) = f(x) \times [f(x)]^2 = [f(x)]^3$$

$$f(4x) = f(2x+2x) = f(2x) \times f(2x) = [f(2x)]^2 = [f(x)]^4$$

2 - يمكن تعميم نتيجة السؤال الأول كمايلي :

$$f(nx) = [f(x)]^n \quad \text{من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

ملاحظة : يمكن البرهان عن صحة هذه النتيجة بالبرهان بالتراجع (غير مطلوب)

$$3 - f(1) = k \quad \text{إذن : } f(n \times 1) = [f(1)]^n = k^n \quad (\text{من أجل } x = 1)$$

$$f(n) = k^n \quad \text{أي :}$$

$$\text{أيضا : } f(n \times 1/n) = f(1) \Leftrightarrow f(n \times 1/n) = k$$

$$\Leftrightarrow [f(1/n)]^n = k \quad \text{لأن } f(n \times 1/n) = [f(1/n)]^n \text{ من أجل } x = 1/n$$

$$4 - \text{ لدينا : } f(1/2) = \sqrt{k} \quad \text{أو} \quad [f(1/2)]^2 = k \Rightarrow \begin{cases} f(1/2) = \sqrt{k} \\ \text{أو} \\ f(1/2) = -\sqrt{k} \end{cases}$$

لكن الدالة  $f$  موجبة إذن :  $f(1/2) = \sqrt{k}$

$$[f(1/4)]^4 = k \Rightarrow [f(1/4)]^2 = \sqrt{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1/4) = +\sqrt{\sqrt{k}} \\ \text{أو} \\ f(1/4) = -\sqrt{\sqrt{k}} \end{cases}$$

لكن الدالة  $f$  موجبة إذن :  $f(1/4) = \sqrt{\sqrt{k}}$

### التمرين 12

أحسب نهايات الدوال التالية عند  $+\infty$  و  $-\infty$

$$f(x) = x + e^{2x} \quad -4 \quad f(x) = e^{-x} \quad -1$$

$$f(x) = 1 + e^x + e^{2x} \quad -5 \quad f(x) = 2e^{2x} \quad -2$$

$$f(x) = e^x + e^{-x} \quad -3$$

### الحل 12



الدالة f	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
$f(x) = e^{-x}$	$+\infty$ (لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ )	0 (لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ )
$f(x) = 2e^{2x}$	0 (لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ )	$+\infty$ (لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ )
$f(x) = e^x + e^{-x}$	$+\infty$ (لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ )	$+\infty$ (لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ )
$f(x) = x + e^{2x}$	$-\infty$ (لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ )	$+\infty$
$f(x) = 1 + e^x + e^{2x}$	1	$+\infty$

**التمرين 13**f دالة معرفة على IR  $\rightarrow f(x) = e^{2x} - e^x$ 1 - أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 2 - تحقق أن :  $f(x) = e^{2x}(1 - e^{-x})$  ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **الحل - 13**1 -  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - e^x = 0$ لأن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ 2 - لدينا :  $e^{2x}(1 - e^{-x}) = e^{2x} - e^{2x-x} = e^{2x} - e^x$ و هو المطلوب .  $f(x) =$ إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x}(1 - e^{-x})$  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$   
 $= +\infty$ **التمرين 14**

أحسب النهايات التالية :

1 -  $f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ 2 -  $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$  عند 03 -  $f(x) = \frac{1}{x}(e^{3x} - 1)$  عند 04 -  $f(x) = x(e^{1/x} - 1)$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$  (يمكنك وضع  $X = 1/x$ )**الحل - 14**1 -  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{2e^x + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{2e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(2 + e^{-x})}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + e^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ لأن } = 1/2$$

$$g: x \mapsto e^x \text{ نعتبر الدالة } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \text{ - 2 لحساب}$$

لدينا  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و خاصة عند 0 و دالتها المشتقة  $g'(x) = e^x$   
 إذن :  $g'(0) = e^0 = 1$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \text{ لكن حسب التعريف :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right) \text{ منه :}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (e^{3x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \text{ - 3}$$

نضع :  $g(x) = e^{3x}$  إذن :  $g'(x) = 3e^{3x}$  منه :  $g'(0) = 3e^0 = 3$  و  $g(0) = 1$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \text{ لكن حسب التعريف :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3 \text{ منه :}$$

$$\text{- 4 لحساب } \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) \text{ نضع } X = 1/x \text{ منه : } x = 1/X \text{ إذن : } \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} (e^X - 1) \text{ منه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} (e^X - 1)$$

$$= 1 \text{ حسب السؤال (2).}$$

التمرين - 15

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بـ } f(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{x}$$

1 - أكتب  $f(x)$  من الشكل  $f(x) = e^x g(x)$  حيث  $g$  دالة للمتغير  $x$ .

$$2 - \text{استنتج } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

الحل - 15

$$f(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{x} = e^x \left( \frac{1 - e^x}{x} \right) \text{ إذن : } g(x) = \frac{1 - e^x}{x} \text{ - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \left( \frac{1 - e^x}{x} \right) \text{ - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -e^x \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{لأن} \quad -1$$

التمرين - 16

f دالة معرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $f(x) = e^{1/x}$ 

احسب نهايات الدالة f على حدود مجموعة تعريفها .

الحل - 16

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1$$

التمرين - 17

f دالة معرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $f(x) = x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ 1- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 2- بين أن المستقيم ذو المعادلة  $y = x - 1$  مقارب لمنحنى الدالة f في جوار  $+\infty$ 

3- بين أن الدالة f فردية .

4- استنتج  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 5- استنتج أن المنحنى الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل في جوار  $x$  - يطلب تعيين معادلته .

الحل - 17

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 - \frac{e^0 + 1}{e^0 - 1} \end{aligned} \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2}{y} = -\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - (x - 1) \quad -2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1 - e^x - 1}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ لأن } = 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = x - 1$  مقارب مائل لمنحنى الدالة  $f$  في جوار  $+\infty$   
3 - من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  فإن  $(-x) \in \mathbb{R}^*$  و لدينا :

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x - \frac{e^{-x} + 1}{e^x - 1} \\ &= -x - \frac{e^{-x}(1 + e^x)}{e^x(1 - e^x)} \\ &= -x - \frac{1 + e^x}{1 - e^x} \\ &= -x + \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \\ &= -\left(x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) \end{aligned}$$

إذن الدالة  $f$  فردية  $= -f(x)$

$$4 - \text{لدينا } f \text{ فردية } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\}$$

5 - لنثبت أن المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل لمنحنى الدالة  $f$  في جوار  $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - (x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 - \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 - \frac{0 + 1}{0 - 1} \\ &= -1 + 1 \end{aligned}$$

$= 0$  إذن فعلا المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب لمنحنى  $f$  في جوار  $-\infty$

### التمرين 18

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$   $\rightarrow f(x) = 2x + 1 - e^{-x}$  و (C) منحناها في معلم .

1 - أدرس تغيرات الدالة  $f$

2 - بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مقارب للمنحنى (C) في جوار  $+\infty$

3 - أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (D) .

### الحل 18

1 - التغيرات :  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 - e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ لأن } = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - e^{-x}$$

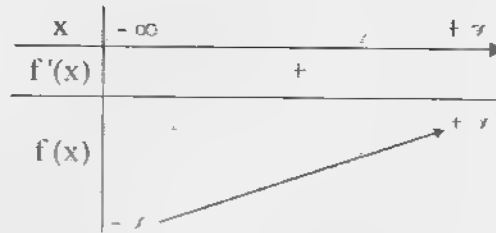
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ لأن } = +\infty$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2 - (-e^{-x}) = 2 + e^{-x}$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $f'(x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  :



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0 \quad -2$$

ن : المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مقارب للمنحنى (C) في جوار  $+\infty$

$$f(x) - (2x + 1) = -e^{-x} \quad \text{لدينا :}$$

اذن : من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f(x) - (2x + 1) < 0$

اي المنحنى (C) يقع دائما تحت المستقيم المقارب (D) .

### التمرين 19

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = -x + 2 + 3e^{-2x}$  و (C) منحناها في معلم .  
بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب مائل عند  $+\infty$  يطلب تعيين معادلته .

### الحل 19

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 2 + 3e^{-2x} - (-x + 2) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{-2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = 0$$

اذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = -x + 2$  مقارب مائل للمنحنى (C) عند  $+\infty$

### التمرين 20

عين مشتقة الدالة  $f$  على المجموعة  $\mathbb{R}$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = (e^x - 1)(e^x + 2) \quad (5) \quad f(x) = x e^x \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x} \quad (6) \quad f(x) = (2x - 3)e^x \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{3e^x - 2}{e^x + 1} \quad (7) \quad f(x) = (x^2 + x + 1)e^x \quad (3)$$

$$f(x) = (1 + \cos x)e^x \quad (4)$$

### الحل 20

$$(1) \quad f(x) = x e^x \Rightarrow f'(x) = 1 \times e^x + e^x \times x = e^x + x e^x = e^x(1 + x)$$

$$(2) \quad f(x) = (2x - 3)e^x \Rightarrow f'(x) = 2e^x + (2x - 3)e^x = e^x(2x - 1)$$

$$(3) \quad f(x) = (x^2 + x + 1)e^x \Rightarrow f'(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x + 1)e^x = e^x(x^2 + 3x + 2)$$

$$(4) \quad f(x) = (1 + \cos x)e^x \Rightarrow f'(x) = -\sin x e^x + (1 + \cos x)e^x = e^x(1 + \cos x - \sin x)$$

$$(5) \quad f(x) = (e^x - 1)(e^x + 2) \Rightarrow f'(x) = e^x(e^x + 2) + e^x(e^x - 1) = e^x(e^x + 2 + e^x - 1) = e^x(2e^x + 1)$$

$$(6) \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x - e^x + 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

$$(7) \quad f(x) = \frac{3e^x - 2}{e^x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 1) - e^x(3e^x - 2)}{(e^x + 1)^2} = \frac{3e^{2x} + 3e^x - 3e^{2x} - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

### التمرين 21

عين مشتقات الدوال التالية على مجموعة تعريفها  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{x/2}} \quad (3) \quad f(x) = e^{2x+3} \quad (1)$$

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{2x} \quad (4) \quad f(x) = (-x - 1)e^{-x} \quad (2)$$

الحل - 21

$$(1) \quad f(x) = e^{2x+3} \rightarrow f'(x) = 2e^{2x+3}$$

$$(2) \quad f(x) = (-x-1)e^{-x} \rightarrow f'(x) = (-1)e^{-x} + (-e^{-x})(-x-1) \\ \rightarrow f'(x) = -e^{-x}(1-x-1) \\ \Rightarrow f'(x) = xe^{-x}$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{1+e^{x/2}} \rightarrow f'(x) = \frac{0 - \frac{1}{2}e^{x/2}}{(1+e^{x/2})^2} \\ \rightarrow f'(x) = \frac{-e^{x/2}}{2(1+e^{x/2})^2}$$

$$(4) \quad f(x) = (x^2-1)e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{2x} + 2e^{2x}(x^2-1) \\ = 2e^{2x}(x+x^2-1) \\ = 2e^{2x}(x^2+x-1)$$

التمرين - 22

عين مشتقة الدالة  $f$  على  $\mathbb{R} - \{1\}$  حيث  $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

الحل - 22

$$f'(x) = \left( \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} \right) e^{\frac{x+1}{x-1}} \\ = \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

التمرين - 23

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x+1+e^x$   
1 - أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

2 - احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$  فسر هندسيا النتيجة.

3 - أرسم في معلم متعامد و متجانس منحنى الدالة  $f$ .

الحل - 23

1 - التغيرات :

$f$  معرفة على  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1+e^x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1+e^x = +\infty$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1+e^x$$

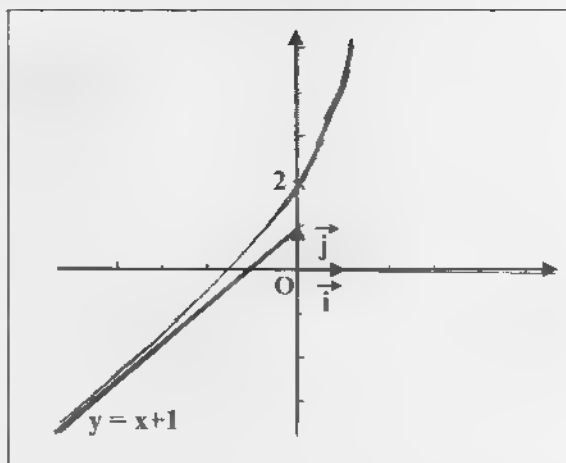
اذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) > 0$   
منه : جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1+e^x - (x+1) = 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$$

$= 0$  إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = x+1$  مقارب مائل لمنحنى الدالة  $f$  في جوار  $-\infty$



## التمرين - 24

$f$  دالة معرفة على المجال  $[0 ; +\infty[ \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x}$

1 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  على  $[0 ; +\infty[$

2 - بين أن المنحنى (C) للدالة  $f$  في معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) عند  $+\infty$  بطلب معادلته .

3 - أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و (D) ثم أنشئ كل منهما .

## الحل - 24

1 - التغيرات :  $f(0) = 0 + 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x} = +\infty$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $[0 ; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2} - (-e^{-x}) = \frac{1}{2} + e^{-x}$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $f'(x) > 0$

منه : جدول التغيرات :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

$$2 - \text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x}$$

$= 0$  إذن المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = \frac{1}{2}x + 1$  مقارب مائل

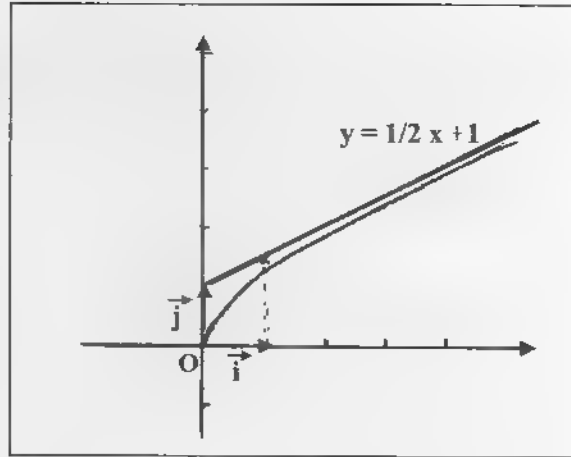
للمنحنى (C) في جوار  $+\infty$

$$3 - f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = -e^{-x} < 0$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $[0 ; +\infty[$  فإن  $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) < 0$

أي : المنحنى (C) يقع دائما تحت المستقيم المقارب (D).

الإنشاء :



التمرين = 25

f دالة معرفة على IR  $\rightarrow f(x) = \frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1}$ نسمى (C) منحنىها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 

1 - ادرس تغيرات الدالة f

2 - أنشئ المنحنى (C).

الحل = 25

1 - التغيرات : f معرفة على  $]-\infty; +\infty[$ 

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-4x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{4x}(1 - 3e^{-4x})}{e^{4x}(1 + e^{-4x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3e^{-4x}}{1 + e^{-4x}} = 1$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

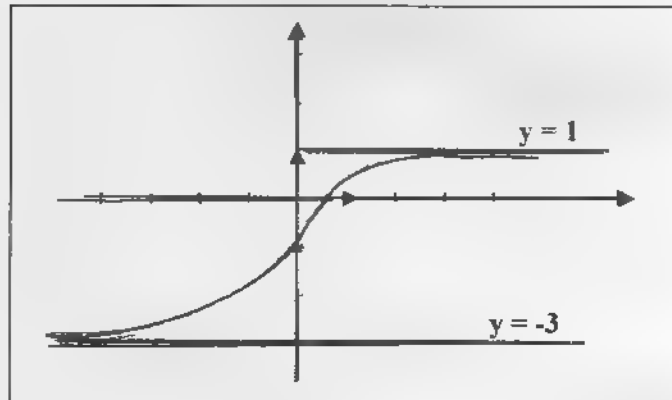
$$f'(x) = \frac{4e^{4x}(e^{4x} + 1) - 4e^{4x}(e^{4x} - 3)}{(e^{4x} + 1)^2} = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}$$

إذن : من أجل كل x من IR فإن  $f'(x) > 0$ 

منه : جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	-3	-1	1

2 - الإنشاء :





## التمرين - 26

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{4e^x + 3}{2(e^x + 1)}$  و (C) منحناها في معلم .

- 1 - اثبت أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب معادلتها .
- 2 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  .
- 3 - أرسم بعناية المنحنى (C) .

## الحل - 26

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x + 3}{2(e^x + 1)} = \frac{4(0) + 3}{2(0 + 1)} = \frac{3}{2}$$

ذن : المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته  $y = 3/2$  في جوار  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(4 + 3e^{-x})}{2e^x(1 + e^{-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 3e^{-x}}{2(1 + e^{-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \frac{4 + 3(0)}{2(1 + 0)} = 2$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  مقارب للمنحنى (C) في جوار  $+\infty$

2 - تغيرات الدالة  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  معرفة على  $\mathbb{R}$

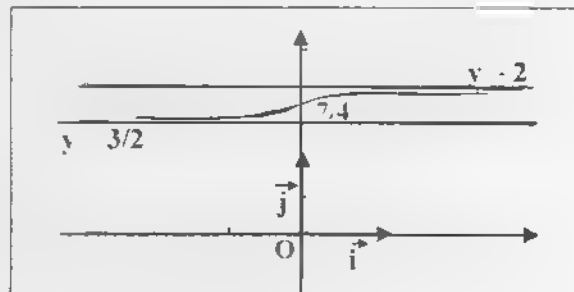
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3/2$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4e^x \cdot 2(e^x + 1) - 2e^x(4e^x + 3)}{[2(e^x + 1)]^2} \\ &= \frac{8e^{2x} + 8e^x - 8e^{2x} - 6e^x}{4(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-2e^x}{4(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $f'(x) < 0$  لأن  $\frac{-2e^x}{4(e^x + 1)^2} < 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$3/2$	$7/4$	$2$



7 - الإنشاء :

## التمرين - 27

$f$  دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

نسمي (C) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

ليكن  $\alpha$  عدد حقيقي من المجال  $]-1; +\infty[$

1 - أكتب معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة  $\alpha$  وليكن  $(T_\alpha)$  هذا المماس .

2 - أثبت أنه توجد قيمتين للعدد  $\alpha$  يكون من أجلها المماس  $(T_\alpha)$  يشمل مبدأ المعلم .

الحل - 27

1 - f قابلة للاشتقاق على  $]-1; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{x e^x + e^x - e^x}{(x+1)^2} = \frac{x e^x}{(x+1)^2}$$

اذن : من أجل كل عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $]-1; +\infty[$  فإن  $f'(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{(\alpha+1)^2}$

نتيجة : معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة  $\alpha$  نكتب من الشكل :  $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$

$$y = \frac{\alpha e^\alpha}{(\alpha+1)^2} (x - \alpha) + \frac{e^\alpha}{\alpha+1} \quad \text{أي :}$$

$$y = \frac{\alpha e^\alpha}{(\alpha+1)^2} x - \frac{\alpha^2 e^\alpha}{(\alpha+1)^2} + \frac{e^\alpha}{\alpha+1} \quad \text{أي :}$$

2 - يكون  $(T_\alpha)$  يمر بالمبدأ إذا وفقط إذا تحقق مايلي :

$$\begin{cases} \alpha \in ]-1; +\infty[ \\ \frac{e^\alpha}{\alpha+1} \left( -\frac{\alpha^2}{\alpha+1} + 1 \right) = 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} \alpha \in ]-1; +\infty[ \\ -\frac{\alpha^2 e^\alpha}{(\alpha+1)^2} + \frac{e^\alpha}{\alpha+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \in ]-1; +\infty[ \\ -\frac{\alpha^2}{\alpha+1} + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} \alpha \in ]-1; +\infty[ \\ -\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} \alpha \in ]-1; +\infty[ \\ \alpha \in \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{-2} ; \frac{-1 + \sqrt{5}}{-2} \right\} \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} \alpha \in ]-1; +\infty[ \\ \alpha \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} ; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\} \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\alpha \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} ; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\} \quad \text{أي}$$

اذن : يوجد مماسين عند النقطة ذات الفاصلة  $\alpha$  يشملان المبدأ و هما من اجل  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  و  $\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

التمرين - 28

f دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{-x} - x - 2$  و (C) منحناها في معلم

1 - أدرس تغيرات الدالة f

2 - بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب معادلته .

3 - بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0,44 < \alpha < -0,45$

4 - إستنتج إشارة f(x) على  $\mathbb{R}$  .

الحل - 28

1 - التغيرات : f معرفة على  $]-\infty; +\infty[$

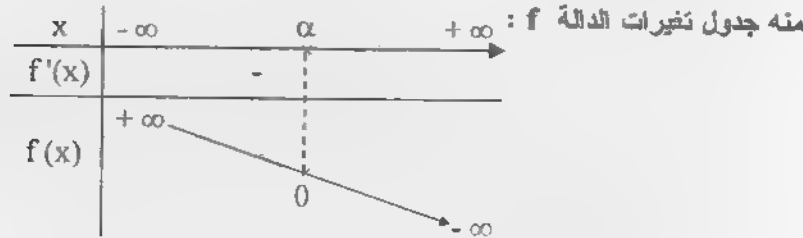
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} - x - 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} - x - 2 = -\infty$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1)$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $f'(x) < 0$  لأن  $(e^{-x} + 1) > 0$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = -x - 2$  مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار  $+\infty$

$$f(-0,45) = e^{0,45} + 0,45 - 2 = 1,56 + 0,45 - 2 = 0,01 \quad -3$$

$$f(-0,44) = e^{0,44} + 0,44 - 2 = 1,55 + 0,44 - 2 = -0,01$$

نتيجة :  $f$  مستمرة على  $[-0,45; -0,44]$

$$f(-0,45) \times f(-0,44) < 0$$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا  $\alpha$  من المجال  $]-0,45; -0,44[$

بما أن  $f$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$  فإن هذا الحل وحيد على  $\mathbb{R}$ .

4 - لدينا  $f(\alpha) = 0$  مع  $-0,45 < \alpha < -0,44$  منه حسب جدول تغيرات الدالة  $f$

نستنتج إشارة  $f(x)$  كمايلي :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$		0	
	+		-

### التمرين 29

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$  و (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 - أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

2 - بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب معادلاتهما .

3 - أثبت أن النقطة  $A(0; 1/2)$  مركز تناظر للمنحنى (C) .

4 - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة A .

لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$

5 - بين أن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $g'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{4(1 + e^x)^2}$

6 - شكل جدول تغيرات الدالة  $g$  . ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  .

7 - استنتج الوضعية النسبية للمماس (C) بالنسبة إلى المنحنى (C).

8 - أرسم بغاية المنحنى (C) .

### الحل 29

1 - تغيرات الدالة  $f$  :

$f$  معرفة على  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x(e^{-x} + 1)} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) > 0$  :  
منه جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$			1

2 - المستقيمات المقاربة :

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مقارب للمنحنى (C) في جوار  $-\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب للمنحنى (C) في جوار  $+\infty$

3 - من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن :  $(-x) \in \mathbb{R}$  أي  $[2(0) - x] \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{1}{e^x+1}$$

$$2(1/2) - f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$$

نتيجة : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f(2(0)-x) = 2(1/2) - f(x)$

إذن : النقطة  $A(0; 1/2)$  مركز تناظر للمنحنى (C)

4 - معادلة المماس عند النقطة  $A(0; 1/2)$  تكتب من الشكل :

$$\begin{cases} f(0) = 1/2 \\ f'(0) = \frac{1}{(2)^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \quad y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

منه : معادلة المماس (T) هي :  $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$   
 5 -  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{(1+e^x)^2 - 4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{1+2e^x+e^{2x}-4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{1-2e^x+e^{2x}}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{(1-e^x)^2}{4(1+e^x)^2} = \frac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$$

و هو المطلوب .

6 - لاحظ أن  $g'(x)$  من إشارة  $(e^x-1)^2$  لأن المقام موجب كمايلي :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$(e^x-1)^2$		0	+

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + 1 - \alpha \right)$$

منه : جدول تغيرات الدالة  $g$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

$$g(0) = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{2} - f(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

من جدول تعربات الدالة  $g$  نستنتج إشارة  $g(x)$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$0$	$+$

7 - الوضعية النسبية لـ (C) و (T) :

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) = g(x) \quad \text{لدينا :}$$

إذن : إشارة  $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$  هي إشارة  $g(x)$  كما يلي :

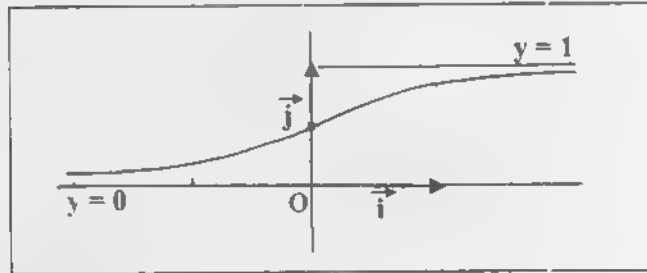
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$	$-$	$0$	$+$

نتيجة : لما  $x \in ]-\infty ; 0[$  : المماس (T) يقع تحت المنحني (C).

لما  $x = 0$  : المماس (T) يقطع المنحني (C) (مماس له)

لما  $x \in ]0 ; +\infty[$  : المماس (T) يقع فوق المنحني (C).

8 - الإنشاء :



التمرين - 30

$f$  و  $g$  دالتان معرفتان على المجال  $[0 ; \pi]$  بـ :  $f(x) = e^x \sin x$  :  $g(x) = e^x$  :  
نسمي  $(C_1)$  و  $(C_2)$  على الترتيب منحنيا الدالتين  $f$  و  $g$  في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1 - اثبت أن  $(C_1)$  و  $(C_2)$  يتقاطعان في نقطة  $A$  يطلب إحداثياتها .

2 - اثبت أن  $(C_1)$  و  $(C_2)$  لهما نفس المماس عند النقطة  $A$  .

الحل - 30

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \sin x = e^x \\ x \in [0 ; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ x \in [0 ; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/2 \\ x \in [0 ; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi/2$$

نتيجة :  $(C_1)$  و  $(C_2)$  يشتركان في نقطة واحدة  $A$  إحداثياتها  $A(\pi/2; f(\pi/2))$  أي :  $A(\pi/2; e^{\pi/2})$

2 - معادلة مماس المنحني  $(C_1)$  عند النقطة  $A$  :

$$f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$$

$$= e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

$$f'(\pi/2) = e^{-\pi/2}(0 - 1) = -e^{-\pi/2} \quad \text{إذن :}$$

$$(1) \dots \dots \dots y = -e^{-\pi/2}(x - \pi/2) + e^{-\pi/2} \quad \text{منه : معادلة المماس هي :}$$

معادلة مماس المنحني  $(C_2)$  عند النقطة  $A$  :

$$g'(x) = -e^{-x}$$

$$g'(\pi/2) = -e^{-\pi/2} \quad \text{إذن :}$$

$$(2) \dots \dots \dots y = -e^{-\pi/2}(x - \pi/2) + e^{-\pi/2} \quad \text{منه : معادلة المماس هي :}$$

خلاصة : بمقارنة المعادلتين (1) و (2) نستنتج أن المنحنيين  $(C_1)$  و  $(C_2)$  لهما نفس المماس عند النقطة  $A$  و معادلته

$$y = -e^{-\pi/2}(x - \pi/2) + e^{-\pi/2}$$

### التمرين - 31

هل الدالتان المعرفتان على  $]0; +\infty[$  :  $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$

و  $g(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$  متساويتان ؟

### الحل - 31

لدينا  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  و من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  فإن :

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

و من جهة أخرى :  $g$  معرفة على  $]0; +\infty[$  و من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$

$$\text{فإن } g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

نتيجة : من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  فإن  $g(x) = f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

أي فعلا الدالتان  $f$  و  $g$  متساويتان على المجال  $]0; +\infty[$  فقط

حذار ! الدالة  $f$  معرفة من أجل  $\begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$  أي  $x \in ]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x \neq 0 \\ x \in ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[ \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x+1}{x} > 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ 1 + \frac{1}{x} > 0 \end{cases} \quad \text{الدالة } g \text{ معرفة من أجل} \\ & x \in ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[ \quad \text{أي} \end{aligned}$$

أي  $g$  معرفة على  $]0; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$

### التمرين - 32

ليكن  $p$  كثير حدود للمتغير الحقيقي  $x$  حيث  $p(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$

1 - تحقق أن  $p(x) = (2x-1)(x+2)(3-x)$

2 - حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $p(x) = 0$

3 - استنتج مجموعة حلول المعادلة  $-2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 + 11 \ln x - 6 = 0$  ثم حلول المعادلة

$$-2e^{3x} + 3e^{2x} + 11e^x - 6 = 0$$

### الحل - 32

$$(2x-1)(x+2) = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x^2 + 3x - 2$$

1- لدينا :

$$(2x-1)(x+2)(3-x) = (2x^2 + 3x - 2)(3-x)$$

منه

$$6x^2 - 2x^3 + 9x - 3x^2 - 6 + 2x$$

$$= -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$$

$p(x)$  و هو المطلوب .

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+2)(3-x) = 0$$

2 -

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ 3 - x = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ 3 - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 1/2 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

إذن : مجموعة حلول المعادلة  $p(x) = 0$  في  $\mathbb{R}$  هي :  $\{1/2 ; -2 ; 3\}$

$$-2 [\ln(x)]^3 + 3 [\ln(x)]^2 + 11 \ln(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \alpha = \ln(x) \\ P(\alpha) = 0 \end{cases} \quad - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \alpha = \ln(x) \\ \alpha \in \{1/2 ; -2 ; 3\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1/2 = \ln x \text{ أو } -2 = \ln x \text{ أو } 3 = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x = e^{1/2} \text{ أو } x = e^{-2} \text{ أو } x = e^3)$$

إذن : حلول المعادلة هي المجموعة  $\{e^{1/2} ; e^{-2} ; e^3\}$

$$-2 e^{3x} + 3 e^{2x} + 11 e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow -2(e^x)^3 + 3(e^x)^2 + 11(e^x) - 6 = 0 \quad - 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = e^x \\ \alpha > 0 \\ P(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = e^x \\ \alpha > 0 \\ \alpha \in \{1/2 ; -2 ; 3\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = e^x \\ \alpha \in \{1/2 ; 3\} \quad \alpha > 0 \end{cases} \text{ لأن}$$

$$\Leftrightarrow (1/2 = e^x \text{ أو } 3 = e^x)$$

$$\Leftrightarrow (x = \ln(1/2) \text{ أو } x = \ln 3)$$

إذن : حلول المعادلة هي المجموعة  $\{\ln(1/2) ; \ln(3)\}$

### التمرين - 33

أكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية :

$$e^{1+\ln 2} \quad (6) \quad \ln 14 - \ln 7 \quad (1)$$

$$e^{-2\ln 3} \quad (7) \quad \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\ln e^3 - \ln e^2 \quad (8) \quad \frac{\ln 100}{\ln 10} \quad (3)$$

$$\ln e \sqrt{e} \quad (9) \quad \ln(10000) + \ln(0,01) \quad (4)$$

$$\ln 2 + \ln 8e - \ln 4e^2 \quad (10) \quad e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} \quad (5)$$

### الحل - 33

$$\ln 14 - \ln 7 = \ln(2 \times 7) - \ln 7 = \ln 2 + \ln 7 - \ln 7 = \ln 2 \quad (1)$$

$$\ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} = \ln 3 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\ln 100}{\ln 10} = \frac{\ln (10^2)}{\ln (10)} = \frac{2 \ln 10}{\ln 10} = 2 \quad (3)$$

$$\ln(10000) + \ln(0,01) = \ln(10^4) + \ln(10^{-2}) = 4 \ln(10) - 2 \ln(10) = 2 \ln(10) \quad (4)$$

$$e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} = 5 + e^{\ln 1/3} = 5 + \frac{1}{3} = 16/3 \quad (5)$$

$$e^{1+\ln 2} = e \times e^{\ln 2} = 2e \quad (6)$$

$$e^{-2\ln 3} = e^{\ln(3^{-2})} = 3^{-2} = 1/9 \quad (7)$$

$$\ln e^3 - \ln e^2 = 3 - 2 = 1 \quad (8)$$

$$\ln e \sqrt{e} = \ln(e \times e^{1/2}) = \ln(e^{3/2}) = \frac{3}{2} \ln e = \frac{3}{2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \ln 2 + \ln 8e - \ln 4e^2 &= \ln 2 + \ln 8 + \ln e - (\ln 4 + \ln e^2) \\ &= \ln 2 + \ln(2^3) + 1 - \ln(2^2) - \ln(e^2) \\ &= \ln 2 + 3 \ln 2 + 1 - 2 \ln 2 - 2 \ln e \\ &= 4 \ln 2 + 1 - 2 \ln 2 - 2 \\ &= 2 \ln 2 - 1 \end{aligned} \quad (10)$$

## التمرين 34

أكتب الأعداد التالية على شكل  $\ln x$  :

$$A = 3 \ln 2 - \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 8 \quad (1)$$

$$B = 2 \ln(0,1) - 3 \ln(0,01) + \ln(2) \quad (2)$$

$$C = 2 \ln(100) - \ln(1/10) \quad (3)$$

## الحل 34

$$A = 3 \ln 2 - \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 8 \quad (1)$$

$$= \ln(2^3) - \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 8$$

$$= \ln 8 - \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 8$$

$$= \frac{3}{2} \ln 8 - \ln 5$$

$$= \ln(8)^{3/2} - \ln 5$$

$$= \ln 8\sqrt{8} - \ln 5$$

$$= \ln\left(\frac{8\sqrt{8}}{5}\right)$$

لاحظ أن :  $8^{3/2} = 8^1 \times 8^{1/2} = 8\sqrt{8}$ 

$$B = 2 \ln(0,1) - 3 \ln(0,01) + \ln(2) \quad (2)$$

$$= 2 \ln(10^{-1}) - 3 \ln(10^{-2}) + \ln 2$$

$$= -2 \ln 10 + 6 \ln 10 + \ln 2$$

$$= 4 \ln 10 + \ln 2$$

$$= \ln(10^4) + \ln 2$$

$$= \ln(2 \times 10^4)$$

$$= \ln(20000)$$

$$C = 2 \ln(100) - \ln(1/10) \quad (3)$$

$$= 2 \ln(10^2) - \ln(10^{-1})$$

$$= 4 \ln(10) + \ln(10)$$

$$= 5 \ln 10$$

$$= \ln(10^5)$$

$$= \ln(100000)$$

## التمرين 35

a و b عدنان حقيقيان موجبان تماما .

أكتب العبارات التالية من الشكل  $\ln x$ 

$$A = \ln a - \ln b + 2 \ln a b \quad (1)$$

$$B = \frac{1}{2} \ln a - \frac{3}{2} \ln b + \ln \frac{a}{b} \quad (2)$$



$$C = \ln(a+1) - \frac{1}{2} \ln b + \frac{3}{2} \ln(a+b) \quad (3) \quad \text{الحل - 35}$$

$$A = \ln a - \ln b + 2 \ln a b = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(a b)^2 = \ln\left(\frac{a}{b} \times (a b)^2\right) = \ln(a^3 b) \quad (1)$$

$$B = \frac{1}{2} \ln a - \frac{2}{2} \ln b + \ln \frac{a}{b} - \ln \sqrt{a} - \ln b \sqrt{b} + \ln \frac{a}{b} = \ln \frac{\sqrt{a}}{b \sqrt{b}} + \ln \frac{a}{b} \quad (2)$$

$$= \ln \frac{\sqrt{a}}{b \sqrt{b}} \times \frac{a}{b} = \ln \frac{a \sqrt{a}}{b^2 \sqrt{b}}$$

$$C = \ln(a+1) - \frac{1}{2} \ln b + \frac{3}{2} \ln(a+b) = \ln(a+1) - \ln \sqrt{b} + \ln(a+b)^{3/2} \quad (3)$$

$$= \ln\left(\frac{a+1}{\sqrt{b}}\right) + \ln(a+b)^{3/2}$$

$$= \ln\left(\frac{(a+1)(a+b)^{3/2}}{\sqrt{b}}\right)$$

التمرين - 36

حل في IR المعادلات التالية :

$$\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln(3) \quad (4)$$

$$2 \ln(x-3) = \ln 4 \quad (1)$$

$$\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1) \quad (5)$$

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3 \quad (2)$$

$$\ln(x-1) - \ln(3) = \ln(2) - \ln(x+4) \quad (6)$$

$$2 \ln x = \ln(x+4) + \ln 2x \quad (3)$$

الحل - 36

$$2 \ln(x-3) = \ln 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ \ln(x-3)^2 = \ln 4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-3)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x-3 = 2 \text{ أو } x-3 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x = 5 \text{ أو } x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \quad \text{إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا هو } \{5\}$$

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \\ \ln(x(x-1)) = \ln 6 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ x^2 - x = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-3)(x+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 3 \text{ أو } x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

إذن : مجموعة حلول المعادلة هي {3}

$$2 \ln x = \ln(x+4) + \ln 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x+4 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\ln x^2 = \ln(x+4)(2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -4 \\ x > 0 \\ x^2 = 2x^2 + 8x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x+8) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \text{ أو } x = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

إذن : المعادلة لا تقبل حلولاً في  $\mathbb{R}$

$$\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4-x > 0 \\ 2x-1 > 0 \\ \ln x(4-x) = \ln(3(2x-1)) \end{cases} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \\ x > 1/2 \\ 4x - x^2 = 6x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < x < 4 \\ -x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < x < 4 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < x < 4 \\ (x+3)(x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < x < 4 \\ x = -3 \text{ أو } x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

منه : مجموعة حلول المعادلة هي  $\{1\}$

$$\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \\ \ln(x+1) = -\ln e + \ln(x-1) \end{cases} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \\ \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x-1}{e}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x+1 = \frac{x-1}{e} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ ex + e = x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x(e-1) = -1-e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = \frac{-1-e}{e-1} \text{ (مرفوض لأنه سالب)} \end{cases}$$

إذن : المعادلة لا تقبل حولا في IR  $\Leftrightarrow x \in \emptyset$

$$\ln(x-1) - \ln(3) = \ln(2) - \ln(x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+4 > 0 \\ \ln\left(\frac{x-1}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{x+4}\right) \end{cases} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -4 \\ \frac{x-1}{3} = \frac{2}{x+4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x+4)(x-1) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + 3x - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-2)(x+5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 2 \text{ أو } x = -5 \end{cases}$$

إذن : حلول المعادلة هي المجموعة {2}  $\Leftrightarrow x = 2$

### التمرين 37

حل في IR المتراجحات التالية :

$$\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5) \quad (1)$$

$$\ln x + \ln(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2) \quad (2)$$

$$\ln(35 - 8x) \geq 3 \ln 2 + \ln(x^2) \quad (3)$$

### الحل 37

$$\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ 4x - 5 > 0 \\ x^2 - 2x > 4x - 5 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) > 0 \\ 4x > 5 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty; 0[ \cup ]2; +\infty[ \\ x \in ]5/4; +\infty[ \\ (x-5)(x-1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]2; +\infty[ \\ x \in ]-\infty; 1[ \cup ]5; +\infty[ \end{cases}$$

إذن : حلول المتراجحة هي المجال  $]5; +\infty[$

$$\ln(x) + \ln(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \\ \ln x(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2) \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \\ x \in \mathbb{R} \text{ (الآن دائما } x^2 - 2x + 2 > 0) \\ x(x+1) \leq x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x \leq x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 2/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq 2/3 \quad \text{منه حلول المتراجحة هي المجال } ]0 ; 2/3]$$

$$\ln(35 - 8x) \geq 3 \ln 2 + \ln x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 35 - 8x > 0 \\ x^2 > 0 \\ \ln(35 - 8x) \geq \ln 8x^2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 35/8 \\ x \neq 0 \\ 35 - 8x \geq 8x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; 35/8[ \\ 8x^2 + 8x - 35 \leq 0 \dots\dots\dots (1) \end{cases}$$

$$\Delta = 64 + 32 \times 35 = 32(2 + 35) = 32 \times 37 \quad \text{لنحل المتراجحة (1) في IR}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-8 - \sqrt{32 \times 37}}{16} = \frac{-8 - 4\sqrt{2 \times 37}}{16} = \frac{-4 - 2\sqrt{74}}{8} \\ x_2 = \frac{-8 + \sqrt{32 \times 37}}{16} = \frac{-8 + 4\sqrt{2 \times 37}}{16} = \frac{-4 + 2\sqrt{74}}{8} \end{cases}$$

$$\text{منه : حلول المتراجحة } 8x^2 + 8x - 35 \leq 0 \text{ على IR هي المجال } \left[ \frac{-4 - 2\sqrt{74}}{8} ; \frac{-4 + 2\sqrt{74}}{8} \right]$$

$$\text{أي حلول الجملة : } \left\{ x \in ]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; 35/8[ \right. : \text{ المجال } \left[ \frac{-4 - 2\sqrt{74}}{8} ; 0[ \cup ]0 ; \frac{-4 + 2\sqrt{74}}{8} \right] \quad \left. 8x^2 + 8x - 35 \leq 0 \right\}$$

### التمرين - 38

أدرس إشارات العبارات الجبرية التالية :

$$(1) \quad nx - \ln 3 \quad (2) \quad (nx + 1)(\ln x - 1)$$

$$(3) \quad (\ln x)(\ln x - 1) \quad (4) \quad 2x \ln(1-x)$$

$$(5) \quad -x^2 \ln(x+1)$$

### الحل - 38

لدراسة إشارة عبارة جبرية من الشكل  $f(x)$  نبحث عن حلول المتراجحة  $f(x) \geq 0$  ثم نستنتج حلول المتراجحة  $f(x) < 0$  (بأبقي الأعداد الحقيقية)

$$(1) \quad \ln x - \ln 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \geq \ln 3 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 3 & +\infty \\ \hline \ln x - \ln 3 & & 0 & + \\ & - & & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{منه جدول الإشارة كمايلي :}$$

$$(2) \quad \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1/e & +\infty \\ \hline \ln x + 1 & & 0 & + \\ & - & & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1/e \end{cases} \quad \text{منه جدول الإشارة :}$$

$$\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & e & +\infty \\ \hline \ln x - 1 & & 0 & + \\ & - & & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e \end{cases} \quad \text{منه جدول الإشارة :}$$

خلاصة :

x	0	1/e	e	$+\infty$
$\ln x + 1$	-	0	+	
$\ln x - 1$		-	0	+
$(\ln x + 1)(\ln x - 1)$	+	-	0	+

$$\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln 1 \end{cases} \quad (3)$$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

$$\text{منه: } \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e \end{cases}$$

$$\text{منه: } \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e \end{cases}$$

x	0	e	$+\infty$
$\ln x - 1$	-	0	+

خلاصة :

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	
$\ln x - 1$		-	0	+
$\ln x(\ln x - 1)$	+	0	-	+

$$\ln(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ \ln(1-x) \geq \ln 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1-x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{منه: } \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1
$\ln(1-x)$	+	0	-

خلاصة :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\ln(1-x)$	+	0	-	
$2x$	-	0	+	
$2x \ln(1-x)$	-	0	-	غير معرف

$$\ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x > 0 \\ \ln(x+1) \geq \ln 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x+1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{منه: } \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

x	-1	0	$+\infty$
$\ln(x+1)$	-	0	+

خلاصة :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$\ln(x+1)$			0	+
$-x^2$		-	0	-
$-x^2 \ln(x+1)$	غير معرف	+	-	-

التمرين - 39

p كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث :  $p(x) = x^4 - 25x^2 + 144$

1 - حل في IR المعادلة  $p(x) = 0$

- 2 - إستنتج حلول المعادلة  $(\ln x)^4 - 25(\ln x)^2 + 144 = 0$  في IR  
 3 - إستنتج حلول المعادلة  $[\ln(\ln x)]^4 - 25[\ln(\ln x)]^2 + 144 = 0$  في IR

الحل - 39

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

- 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y : y \geq 0 \\ y^2 - 25y + 144 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y : y \geq 0 \\ (y - 16)(y - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y : y \geq 0 \\ y = 16 \text{ أو } y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \text{ أو } \\ x^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ أو } x = -3 \\ x = 4 \text{ أو } x = -4 \end{cases}$$

$$p(x) = 0 \text{ و هي حلول المعادلة } \Leftrightarrow x \in \{-4; -3; 3; 4\}$$

- 2

$$(\ln x)^4 - 25(\ln x)^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = \alpha \\ P(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = \alpha \\ \alpha \in \{-4; -3; 3; 4\} \end{cases} \quad \text{حسب السؤال (1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = -4 \text{ أو } \ln x = -3 \text{ أو } \ln x = 3 \text{ أو } \ln x = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x = e^{-4} \text{ أو } x = e^{-3} \text{ أو } x = e^3 \text{ أو } x = e^4)$$

إذن : حلول المعادلة المطلوبة هي :  $\{e^{-4}; e^{-3}; e^3; e^4\}$

- 3

$$[\ln(\ln x)]^4 - 25[\ln(\ln x)]^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \\ y = \ln x \\ [(\ln y)]^4 - 25[(\ln y)]^2 + 144 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > \ln 1 \\ y = \ln x \\ y \in \{e^{-4}; e^{-3}; e^3; e^4\} \end{cases} \quad \text{حسب السؤال (2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ \ln x = e^{-4} \text{ أو } \ln x = e^{-3} \text{ أو } \ln x = e^3 \text{ أو } \ln x = e^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \in \{(e)^{e^{-4}}; (e)^{e^{-3}}; (e)^{e^3}; (e)^{e^4}\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \in \{(e)^{\frac{1}{e^4}}; (e)^{\frac{1}{e^3}}; (e)^{e^3}; (e)^{e^4}\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{إذن : حلول المعادلة هي } \{e^{e^{-4}}; e^{e^{-3}}; e^{e^3}; e^{e^4}\} \text{ لأن } e^x > 1 \text{ من أجل } x > 0$$

حذار !  $e^{e^a} \neq (e^a)^e$  ولكن  $(e^a)^e = e^{ae}$

## التمرين 40

$p(x) = 4x^2 - 4x - 3$  كثير حدود للمتغير الحقيقي  $x$  حيث

1 - عين جذور كثير الحدود  $p$

2 - استنتج حلول المعادلة  $4(\ln x)^2 - 4 \ln x - 3 = 0$

3 - استنتج حلول المعادلة  $\ln(4x - 3) = \ln(x + 3) - \ln x$

## الحل - 40

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0 \quad - 1$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4-8}{8} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{4+8}{8} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

نتيجة : جذور كثير الحدود  $p$  هي  $\{-1/2 ; 3/2\}$

$$4(\ln x)^2 - 4 \ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \alpha = \ln x \\ P(\alpha) = 0 \end{cases} \quad - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \alpha = \ln x \\ \alpha \in \{-1/2 ; 3/2\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = -1/2 \text{ أو } \ln x = 3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = e^{-1/2} \text{ أو } x = e^{3/2} \end{cases}$$

خلاصة : حلول المعادلة  $4(\ln x)^2 - 4 \ln x - 3 = 0$  هي  $\{e^{-1/2} ; e^{3/2}\}$

$$\ln(4x - 3) = \ln(x + 3) - \ln x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x + 3 > 0 \\ 4x - 3 > 0 \\ \ln(4x - 3) = \ln\left(\frac{x+3}{x}\right) \end{cases} \quad - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \\ x > 3/4 \\ 4x - 3 = \frac{x+3}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3/4 \\ x(4x - 3) = x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3/4 \\ 4x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3/4 \\ x = -1/2 \text{ أو } x = 3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{إذن : حلول المعادلة هي } \{3/2\} \quad x = 3/2$$

## التمرين 41

$p(x) = 2x^2 - x - 1$  كثير حدود للمتغير الحقيقي  $x$  حيث

1 - عين جذور كثير الحدود  $p$

2 - استنتج تحليلاً لـ  $2(\ln x)^2 - \ln x - 1$

3 - استنتج حلول المتراجحة  $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 \leq 0$  ثم المتراجحة  $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 > 0$

## الحل - 41

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \quad - 1$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

إذن :  $\begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$  منه : جذور كثير الحدود P هي :  $\{-1/2; 1\}$

2 - حسب السؤال الأول فإن :  $p(x) = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$

إذن : نضع  $\alpha = \ln x$   $x > 0$  منه :  $2(\ln x)^2 - \ln x - 3 = p(\alpha)$

$$= 2(\alpha - 1)(\alpha + \frac{1}{2})$$

و هو التحليل المطلوب  $= 2(\ln x - 1)(\ln x + \frac{1}{2})$

3 -  $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + \frac{1}{2}) \leq 0$

إذن : يكفي دراسة إشارة  $(\ln x - 1)$  ثم إشارة  $(\ln x + \frac{1}{2})$  كمايلي :

$$\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e \end{cases}$$

x		0	e	$+\infty$
$\ln x - 1$		-	0	+

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e \end{cases}$$

$$\ln x + 1/2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq -1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e^{-1/2} \end{cases}$$

x		0	$e^{-1/2}$	$+\infty$
$\ln x - 1/2$		-	0	+

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e^{-1/2} \end{cases}$$

خلاصة :

x		0	$e^{-1/2}$	e	$+\infty$
$\ln x + 1/2$		-	0	+	
$\ln x - 1$			-	0	+
الجداء		+	0	-	0

حلول المترابحة  $(\ln x - 1)(\ln x + \frac{1}{2}) \leq 0$  هي المجال  $[e^{-1/2}; e]$

إذن حلول المترابحة  $(\ln x - 1)(\ln x + \frac{1}{2}) > 0$  هي  $]0; e^{-1/2}[ \cup ]e; +\infty[$

## التمرين - 42

حل في  $\mathbb{R}^2$  جمل المعادلات التالية :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x + y = 60 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln x/y = -\ln 3 \end{cases} \quad (2)$$

## الحل - 42

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; y > 0 \\ x + y = 60 \\ \ln xy = \ln 1000 \end{cases} \quad (1)$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 ; y > 0 \\ x + y = 60 \dots\dots\dots (1) \\ x y = 1000 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) :  $y = 60 - x$ 

إذن المعادلة (2) تصبح :

$$x(60 - x) = 1000$$

$$60x - x^2 = 1000$$

$$x^2 - 60x + 1000 = 0$$

أي :  $x^2 - 60x + 1000 = 0$  وهي معادلة من الدرجة 2 ذات المجهول  $x$ .

$$\Delta = 3600 - 4000 = -400$$

إذن : المعادلة لا تقبل حلولاً في  $\mathbb{R}$ نتيجة : الجملة لا تقبل حلولاً في  $\mathbb{R}^2$ 

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln(x/y) = -\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x y > 0 \\ x^2 + 2y - 16 = 0 \\ \ln \frac{x}{y} = \ln(1/3) \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x y > 0 \\ x^2 + 2y - 16 = 0 \dots\dots (1) \\ x/y = 1/3 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

من (2) :  $y = 3x$ إذن : (1) تصبح :  $x^2 + 2(3x) - 16 = 0$  أي  $x^2 + 6x - 16 = 0$ 

$$\Delta = 36 + 64 = 100$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-6 - 10}{2} = -8 \\ x_2 = \frac{-6 + 10}{2} = 2 \end{cases}$$

من أجل  $x = -8$  فإن  $y = 3(-8) = -24$  منه :  $xy = -8(-24) = 192$  مقبول لأن  $xy > 0$ من أجل  $x = 2$  فإن  $y = 3(2) = 6$  منه :  $xy = 2(6) = 12$  مقبول لأن  $xy > 0$ خلاصة : حلول الجملة هي الثنائيات :  $\{(-8 ; -24) ; (2 ; 6)\}$ 

تحقيق :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 4 + 12 = 16 \\ \ln(x/y) = \ln(2/6) = \ln(1/3) = -\ln 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -8 \\ y = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 64 + 2(-24) = 64 - 48 = 16 \\ \ln(x/y) = \ln(-8/-24) = \ln(1/3) = -\ln 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 ; y > 0 \\ x^2 + y^2 = 169 \\ \ln xy = \ln 60 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x > 0 ; y > 0 \\ x^2 + y^2 = 169 \dots\dots\dots (1) \\ xy = 60 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) :  $y = 60/x$ 

$$x^2 + \frac{3600}{x^2} = 169 \quad \text{أي} \quad x^2 + (60/x)^2 = 169 \quad \text{تصبح : (1) المعادلة}$$

$$x^4 - 169x^2 + 3600 = 0 \quad \text{أي} \quad \frac{x^4 + 3600}{x^2} = 169 \quad \text{أي}$$

نضع  $\alpha = x^2$  حيث  $\alpha \geq 0$  إذن :  $\alpha^2 - 169\alpha + 3600 = 0$ 

$$\Delta = (169)^2 - 4(3600) = (169)^2 - (120)^2 = (169 - 120)(169 + 120) = 49 \times 289 = (7 \times 17)^2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{169 - 7 \times 17}{2} = \frac{169 - 119}{2} = \frac{50}{2} = 25 \\ \alpha_2 = \frac{169 + 7 \times 17}{2} = \frac{169 + 119}{2} = \frac{288}{2} = 144 \end{cases}$$

$$x^2 = 144 \text{ أو } x^2 = 25 \quad \text{إذن :}$$

$$x \in \{-5; 5; -12; 12\} \quad \text{منه :}$$

$$x \in \{5; 12\} \quad \text{لكن : } x > 0$$

$$y = 60/5 = 12 \text{ فإن } x = 5 \quad \text{من أجل}$$

$$y = 60/12 = 5 \text{ فإن } x = 12 \quad \text{من أجل}$$

خلاصة : حلول الجملة (3) هي الثنائيات  $\{(5; 12); (12; 5)\}$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; y > 0 \\ x^3 + y^3 = 9 \\ \ln xy = \ln 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x > 0; y > 0 \\ x^3 + y^3 = 9 \dots\dots\dots (1) \\ xy = 2 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) :  $y = 2/x$

$$\text{إذن المعادلة (1) تصبح : } x^3 + (2/x)^3 = 9 \quad \text{أي} \quad x^3 + \frac{8}{x^3} = 9 \quad \text{أي} \quad \frac{x^6 + 8}{x^3} = 9$$

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \quad \text{أي} \quad x^6 + 8 = 9x^3$$

$$\text{نضع } \alpha = x^3 \quad \text{إذن : } \alpha^2 - 9\alpha + 8 = 0 \quad \text{أي} \quad (\alpha - 8)(\alpha - 1) = 0$$

$$\alpha = 8 \quad \text{أو} \quad \alpha = 1$$

$$\text{منه : } x^3 = 8 \quad \text{أو} \quad x^3 = 1$$

$$\text{أي : } x = 2 \quad \text{أو} \quad x = 1$$

$$\text{من أجل } x = 1 \text{ فإن } y = 2/1 = 2$$

$$\text{من أجل } x = 2 \text{ فإن } y = 2/2 = 1$$

خلاصة : حلول الجملة (4) هي الثنائيات  $\{(2; 1); (1; 2)\}$

#### التمرين - 43

عين أصغر عدد طبيعي  $n$  في كل من الحالات التالية :

$$(1) \quad (1/2)^n \leq 0,02 \quad (2) \quad (0,8)^n \leq 0,01$$

$$(3) \quad (1,2)^n \geq 1040 \quad (4) \quad 21000(1 + 0,035)^n \geq 30000$$

#### الحل - 43

$$(1/2)^n \leq 0,02 \Rightarrow \ln((1/2)^n) \leq \ln(0,02) \quad (1)$$

$$\Rightarrow n \ln(1/2) \leq \ln(2/100)$$

$$\Rightarrow -n \ln 2 \leq \ln 2 - \ln 100$$

$$\Rightarrow -n \leq 1 - \frac{\ln 100}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln 100}{\ln 2} - 1$$

$$\text{(باستعمال الحاسبة)} \Rightarrow n \geq 6,643 - 1$$

$$\text{(لأن } n \in \mathbb{N} \text{ أصغر عدد طبيعي)} \Rightarrow n = 6$$

$$(0,8)^n \leq 0,01 \Rightarrow \ln((0,8)^n) \leq \ln(0,01) \quad (2)$$

$$\Rightarrow n \ln(0,8) \leq \ln(0,01)$$

$$\ln(0,8) < 0 \quad \text{لأن} \quad \Rightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}$$

$$\text{باستعمال الحاسبة} \Rightarrow n \geq 20,63$$

$$\Rightarrow n = 21 \quad \text{أصغر عدد طبيعي}$$

$$(1,2)^n \geq 1040 \Rightarrow \ln((1,2)^n) \geq \ln(1040) \quad (3)$$

$$\Rightarrow n \ln(1,2) \geq \ln(1040)$$

$$\rightarrow n > \frac{\ln(1040)}{\ln(1,2)}$$

$$\Rightarrow n \geq 38,10$$

$$\Rightarrow n = 39 \text{ أصغر عدد طبيعي}$$

$$21000(1 + 0,035)^n \geq 30000 \Rightarrow (1 + 0,035)^n \geq \frac{30000}{21000} \quad (4)$$

$$\Rightarrow n \ln(1,035) \geq \ln 30 - \ln 21$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln 30 - \ln 21}{\ln(1,035)}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{0,35667}{0,0344}$$

$$\Rightarrow n = 11 \text{ أصغر عدد طبيعي}$$

#### التمرين 44

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية حدها الأول  $u_0 = 2$  وأساسها  $3/2$  ابتداءً من أي رتبة  $n$  تكون حدود المتتالية  $(u_n)$  أكبر من  $10^5$  ؟

#### الحل 44

$$u_n = 2(3/2)^n \text{ أي } u_n = u_0(3/2)^n$$

$$u_n > 10^5 \Rightarrow 2(3/2)^n > 10^5$$

$$\Rightarrow \ln [2(3/2)^n] > \ln(10^5)$$

$$\Rightarrow \ln 2 + \ln(3/2)^n > 5 \ln 10$$

$$\Rightarrow n \ln(3/2) > 5 \ln 10 - \ln 2$$

$$\ln(3/2) > 0 \text{ لأن } \Rightarrow n > \frac{5 \ln 10 - \ln 2}{\ln(3/2)}$$

$$\Rightarrow n > 26,68$$

$$\Rightarrow n = 27 \text{ أصغر عدد طبيعي .}$$

عبارة الحد العام :  
منه :

#### التمرين 45

أدرس تغيرات الدالة  $f$  المعرفة على  $]0 ; +\infty[$   $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

#### الحل 45

$f$  معرفة على  $]0 ; +\infty[$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x = +\infty$$

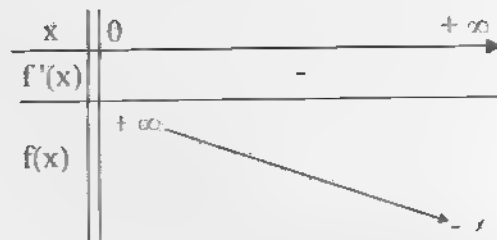
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0 \text{ لأن } = -\infty$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $]0 ; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x} \left( \frac{1}{x} + 1 \right) = \frac{-1}{x} \left( \frac{x+1}{x} \right) = \frac{-x-1}{x^2}$$

$x$	$0$	$+\infty$
$-x-1$		-
$x^2$		+
$\frac{-x-1}{x^2}$		-



## التمرين - 46

f دالة معرفة على  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

الدرس تغيرات الدالة f على  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

## الحل - 46

f معرفة على  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{y} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} = -\infty$$

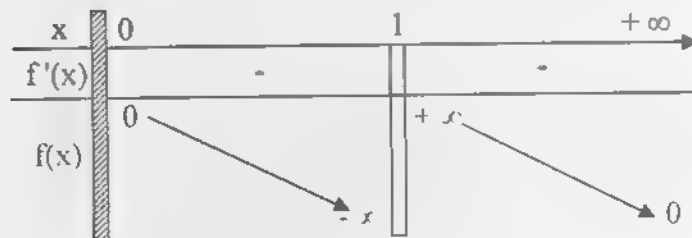
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = 0$$

f قابلة للاشتقاق على  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-1/x}{[\ln(x)]^2} = \frac{-1}{x[\ln x]^2}$$

إذن : من أجل كل x من  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  فإن  $f'(x) < 0$  منه جدول تغيرات الدالة f :



## التمرين - 47

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ  $f(x) = 2[\ln x]^2 - \ln x - 3$

## الحل - 47

f معرفة على  $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2(\ln x)^2 - \ln x - 3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(\ln x)^2 - \ln x - 3$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \left[ 2 \ln x - 1 - \frac{3}{\ln x} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\ln x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 4 \times \frac{1}{x} \times \ln x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (4 \ln x - 1)$$

إذن : إشارة f'(x) على المجال  $]0; +\infty[$  هي إشارة  $(4 \ln x - 1)$  لأن  $1/x > 0$

$$4 \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1/4$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln e^{1/4}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{1/4}$$

منه جدول إشارة  $f'(x)$  :

$x$	0	$e^{1/4}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	0	$e^{1/4}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{25}{8}$	$+\infty$

$$f(e^{1/4}) = 2(\ln e^{1/4})^2 - \ln e^{1/4} - 3 = 2(1/4)^2 - \frac{1}{4} - 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 3 = \frac{1-2-24}{8} = -\frac{25}{8}$$

التمرين = 48

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 + \ln x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \ln x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x) \ln x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2 \ln x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) \ln(-x) \quad (8)$$

$$\lim_{x \geq 0} x + 5 - \ln x \quad (4)$$

الحل = 48

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \ln x = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln x = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2 \ln x = -\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \geq 0} x + 5 - \ln x = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 + \ln x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 + y} = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x) \ln x = -\infty \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2 \ln x} = \frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) \ln(-x) = +\infty \quad (8)$$

التمرين = 49

أحسب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$$

الحل = 49

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left( \frac{1}{\ln x} + 1 \right)}{\ln x \left( \frac{1}{\ln x} - 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} + 1}{\frac{1}{\ln x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = 1/-1 = -1$$

التمرين 50

f دالة معرفة كمالتي :  $f(x) = \ln [\ln(x-1)]$ 1 - بين أن f معرفة من أجل كل x من المجال  $]2; +\infty[$ 2 - أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \geq 2} f(x)$ 

الحل 50

1 - f معرفة من أجل :  $\begin{cases} x-1 > 0 \\ \ln(x-1) > 0 \end{cases}$  أي  $\begin{cases} x > 1 \\ \ln(x-1) > \ln 1 \end{cases}$ أي  $\begin{cases} x > 1 \\ x-1 > 1 \end{cases}$  أي  $\begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \end{cases}$  أي  $x > 2$ منه : f معرفة من أجل كل x من المجال  $]2; +\infty[$ 2 - لدينا :  $\lim_{x \geq 2} (x-1) = 1$  إذن :  $\lim_{x \geq 2} \ln(x-1) = \ln(1) = 0$ منه :  $\lim_{x \geq 2} \ln [\ln(x-1)] = \lim_{y \geq 0} \ln y$ أي :  $\lim_{x \geq 2} f(x) = -\infty$ و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$  إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty$ منه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln [\ln(x-1)] = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y$ أي :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 

التمرين 51

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\left(\frac{\ln(1+x/2)}{x}\right)} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \geq 0} \frac{\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} \quad (2)$$

الحل 51

لاحظ أن عدد التعويض في الحساب نحصل على حالة عدم التعيين لأن البسط و المقام يؤولا إلى صفر معا إذن يجب إزالة حالة عدم التعيين في كل مرة . لذلك نلجأ إلى إستعمال تعريف العدد المشتق كمالتي :

1 - لتكن f دالة معرفة بـ  $f(x) = \ln(1+2x)$  على المجال  $] -1/2; +\infty[$ f قابلة للاشتقاق على  $] -1/2; +\infty[$  و دالتها المشتقة :  $f'(x) = \frac{2}{1+2x}$ 

$$\text{إذن : } f'(0) = \frac{2}{1+0} = 2$$

لكن حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{أي : } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 0}{x}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} \quad \text{أي :}$$

$$2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} \quad \text{منه :}$$

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 1 \quad \text{خلاصة :}$$

2 - نعرف الدالة  $f$  على المجال  $]-1/3; +\infty[$  بـ  $f(x) = \ln(1+3x)$

$$f'(x) = \frac{3}{1+3x} \quad \text{أي : دالتها المشتقة :}$$

$$f'(0) = \frac{3}{1+0} = 3 \quad \text{إذن :}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{لكن حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن :}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x) - 0}{x} \quad \text{أي :}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} \quad \text{أي :}$$

$$3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \quad \text{خلاصة :}$$

3 - نعرف الدالة  $f$  على المجال  $]-2; +\infty[$  بـ  $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{2}x)$

$$f'(x) = \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2}x} \quad \text{أي : دالتها المشتقة :}$$

$$f'(0) = \frac{1/2}{1+0} = 1/2 \quad \text{إذن :}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{لكن حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن :}$$

$$1/2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{1}{2}x) - 0}{x} \quad \text{أي :}$$

$$1/2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{x}{2})}{x} \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + \frac{x}{2})}{x} = 2 \cdot 1/2 = 1 \quad \text{خلاصة :}$$

4 - صغ  $y = \sqrt{x}$  : لما  $x \geq 0$  فإن  $y \geq 0$

$$\lim_{x \geq 0} \frac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} = \lim_{y \geq 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} \quad \text{منه :}$$

إذن : نعتبر الدالة  $f$  على المجال  $[0; +\infty[$  معرفة بـ  $f(y) = \ln(1 + y)$

$$f'(y) = \frac{1}{1+y} \quad \text{أي : } f'(0) = 1 \quad \text{العدد المشتق على اليمين .}$$

$$f'(0) = \lim_{y \geq 0} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} \quad \text{لكن تعريفاً :}$$

$$1 = \lim_{y \geq 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} \quad \text{أي :}$$

خلاصة :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} = 1$

التمرين - 51

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

اثبت أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0

الحل - 51

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} \\ (y > 0 \text{ حيث } x^2 = y \text{ بوضع}) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y + 1)}{y} \end{aligned}$$

حسب التمرين 57 .  $= 1$ إذن : الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق  $f'(0) = 1$ 

التمرين - 52

عين مجموعات تعريف ثم مشتقات الدوال التالية :

(9)  $f(x) = \ln(-2x - 1)$  (1)  $f(x) = x + \ln x$

(10)  $f(x) = 1/2 [\ln(1 - x)]^2$  (2)  $f(x) = -x + \ln 2 + \ln x$

(11)  $f(x) = x(2 - \ln x^2)$  (3)  $f(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2$

(12)  $f(x) = \ln(2x^2 + x - 6)$  (4)  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

(13)  $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  (5)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

(14)  $f(x) = \frac{2x - 1 + \ln x}{x}$  (6)  $f(x) = x \ln x - x$

(15)  $f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$  (7)  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

(16)  $f(x) = \frac{x+1}{\ln x - 1}$  (8)  $f(x) = 2x^2 - \ln x$

الحل - 52

(1)  $f(x) = x + \ln x$  إذن :  $f$  معرفة من أجل  $x > 0$

منه :  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$ 

الدالة المشتقة :  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

(2)  $f(x) = -x + \ln 2 + \ln x$  إذن :  $f$  معرفة من أجل  $x > 0$

منه :  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$ 

الدالة المشتقة :  $f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$

(3)  $f(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2$  إذن :  $f$  معرفة من أجل  $x > 0$

منه :  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$ 

الدالة المشتقة :  $f'(x) = \frac{2}{x} \ln x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (2 \ln x + 1)$

(4)  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$  إذن :  $f$  معرفة من أجل :  $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$  أي  $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$



منه :  $f$  معرفة على  $]0 ; 1[U$  ;  $+\infty[$

$$f'(x) = \frac{-1/x}{[\ln(x)]^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2} \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (5) \quad \text{إذن : } f \text{ معرفة من أجل : } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \text{ أي } x > 0$$

منه :  $f$  معرفة على  $]0 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$f(x) = x \ln x - x \quad (6) \quad \text{إذن : } f \text{ معرفة من أجل } x > 0$$

منه :  $f$  معرفة على  $]0 ; +\infty[$

$$f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} - 1 = \ln x \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x \quad (7) \quad \text{إذن : } f \text{ معرفة من أجل : } \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ أي } x > 0$$

منه :  $f$  معرفة على  $]0 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left( \frac{-1}{x} + 1 \right) = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$f(x) = 2x^2 - \ln x \quad (8) \quad \text{إذن : } f \text{ معرفة من أجل } x > 0$$

منه :  $f$  معرفة على  $]0 ; +\infty[$

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$f(x) = \ln(-2x-1) \quad (9) \quad \text{إذن : } f \text{ معرفة من أجل } -2x-1 > 0$$

أي :  $x < -1/2$

منه :  $f$  معرفة على  $] -\infty ; -1/2[$

$$f'(x) = \frac{-2}{-2x-1} = \frac{2}{2x+1} \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$f(x) = 1/2 [\ln(1-x)]^2 \quad (10) \quad \text{إذن : } f \text{ معرفة من أجل } 1-x > 0 \text{ أي } x < 1$$

منه :  $f$  معرفة على  $] -\infty ; 1[$

$$f'(x) = 1/2 \left[ 2 \left( \frac{-1}{1-x} \right) \ln(1-x) \right] = \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$f(x) = x(2 - \ln x^2) \quad (11) \quad \text{إذن : } f \text{ معرفة من أجل } x^2 > 0 \text{ أي } x \neq 0$$

منه :  $f$  معرفة على  $] -\infty ; 0[U \cup ]0 ; +\infty[$

$$f'(x) = (2 - \ln x^2) + x \left( -\frac{2x}{x^2} \right) = -\ln x^2 \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$f(x) = \ln(2x^2 + x - 6) \quad (12) \quad \text{إذن : } f \text{ معرفة من أجل } 2x^2 + x - 6 > 0$$

$$2(x+2)(x-\frac{3}{2}) > 0 \quad \text{أي}$$

أي  $x \in ]-\infty ; -2[U \cup ]3/2 ; +\infty[$

منه :  $f$  معرفة على  $] -\infty ; -2[U \cup ]3/2 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{4x+1}{2x^2+x-6} \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ (x+1)(x-1) > 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} > 0 \end{cases} \quad \text{إذن : } f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad (13)$$

منه :  $f$  معرفة على  $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x+1)(x-1)} \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$f(x) = \frac{2x-1+\ln x}{x} \quad \text{إذن : } f \text{ معرفة من أجل : } \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ أي } x > 0 \quad (14)$$

منه :  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(2 + \frac{1}{x}\right)x - (2x-1+\ln x)}{x^2} = \frac{2-\ln x}{x^2} \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \quad \text{إذن : } f \text{ معرفة من أجل } x > 0 \quad (15)$$

منه :  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$

$$f'(x) = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} - \frac{1}{2}(2x) = 2x \ln x + x - x = 2x \ln x \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln x - 1} \quad \text{إذن : } f \text{ معرفة من أجل : } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x - 1 \neq 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq e \end{cases} \text{ أي}$$

$$\text{منه : } f \text{ معرفة على } ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(x+1)}{(\ln x - 1)^2} = \frac{\ln x - 2 - \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2} \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

### التمرين 53

$f$  دالة معرفة على  $]2; +\infty[$  بـ  $f(x) = -x + 1 + \ln x$  و (C) منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

اكتب معادلة مماس منحنى الدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $e$  .

### الحل 53

المعادلة تكتب من الشكل :  $y = f'(e)(x - e) + f(e)$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x} \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(e) = \frac{1-e}{e} \quad \text{منه :}$$

$$f(e) = -e + 1 + \ln e = -e + 2 \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$y = \frac{1-e}{e}(x-e) - e + 2 \quad \text{إذن : معادلة المماس هي :}$$

$$y = \frac{1-e}{e}x - (1-e) - e + 2 \quad \text{أي :}$$

$$y = \frac{1-e}{e}x - 1 + e - e + 2 \quad \text{أي :}$$

$$y = \frac{1-e}{e}x + 1 \quad \text{أي :}$$

**التمرين 54**

$f$  دالة معرفة على  $]-2; +\infty[$  بـ  $f(x) = 3 \ln(2+x) + x^2 - 3x$  .  
بين أن المنحنى  $(C)$  الممثل للدالة  $f$  يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل .

**الحل 54**

يكون للمنحنى  $(C)$  مماس موازي لمحور الفواصل عند نقطة ذات الفاصلة  $x$  إذا و فقط إذا كان ميله معدوم أي  $f'(x) = 0$  .

$$f'(x) = \frac{3}{2+x} + 2x - 3 = \frac{3 + (2x-3)(2+x)}{2+x} = \frac{2x^2 + x - 3}{x+2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-2; +\infty[ \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{منه :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-2; +\infty[ \\ 2(x-1)(x+3/2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in ]-2; +\infty[ \\ x = 1 \text{ أو } x = -3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1; -3/2\}$$

نتيجة : يوجد مماسين للمنحنى  $(C)$  كل منهما موازي لحامل محور الفواصل  
أحدهما عند النقطة ذات الفاصلة 1 و الآخر عند النقطة ذات الفاصلة  $-3/2$  .

**التمرين 55**

إذا علمت أن  $\log(3,81) \approx 0,58092$  أعط قيمة تقريبية للأعداد التالية :  
(1)  $\log(381)$  (2)  $\log(0,381)$  (3)  $\log(3,81 \times 10^{-3})$

**الحل 55**

$$\log(381) = \log(3,81 \times 10^2) \quad (1)$$

$$= \log(3,81) + \log(10^2)$$

$$= \log(3,81) + 2 \log(10)$$

$$\log(10) = 1 \quad \text{لأن } \approx 0,58092 + 2$$

$$\approx 2,58092$$

$$\log(0,381) = \log(3,81 \times 10^{-1}) \quad (2)$$

$$= \log(3,81) + \log(10^{-1})$$

$$= \log(3,81) - \log(10)$$

$$\approx 0,58092 - 1$$

$$\approx -0,41908$$

$$\log(3,81 \times 10^{-3}) = \log(3,81) + \log(10^{-3}) \quad (3)$$

$$= \log(3,81) - 3 \log(10)$$

$$\approx 0,58092 - 3$$

$$\approx -2,41908$$

**التمرين 56**

حل في IR المعادلات التالية :

$$\log x = 0,01 \quad (3) \quad \log x = 5 \quad (1)$$

$$\log x = -3 \quad (2)$$

**الحل 56**

$$\log x = 5 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 10} = 5 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 5 \ln 10 = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln 10^5 = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 10^5 \quad \text{إن : مجموعة حلول المعادلة هي } \{10^5\}$$

$$\log x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x = \log(10^{-3}) \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 10^{-3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 10^{-3} \quad \text{إذن : مجموعة حلول المعادلة هي } \{10^{-3}\}$$

ملاحظة : يمكن الإجابة عن السؤال الأول بهذه الطريقة أي دون الرجوع إلى العلاقة  $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$$\log x = 0,01 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x = \log(10^{0,01}) \end{cases} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 10^{0,01} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 10^{0,01} \quad \text{منه : مجموعة حلول المعادلة هي } \{10^{0,01}\}$$

#### التمرين 57

حل في IR المتراجحات التالية :

$$\log x \geq 0,1 \quad (3) \quad \log x > 4 \quad (1)$$

$$\log x < \log(1-x) \quad (4) \quad \log x < -10 \quad (2)$$

#### الحل 57

بما أن الدالة  $\log$  لها نفس خواص الدالة  $\ln$  فإن يمكن حل هذه المتراجحات كمايلي :

$$\log x > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x > \log(10^4) \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 10^4 \end{cases}$$

إذن : مجموعة الحلول هي المجال  $]10^4; +\infty[$

$$\log x < -10 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x < \log(10^{-10}) \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10^{-10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 10^{-10}$$

إذن : مجموعة الحلول هي المجال  $]0; 10^{-10}[$

$$\log x \geq 0,1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x \geq \log(10^{0,1}) \end{cases} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 10^{0,1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 10^{0,1}$$

إذن : مجموعة الحلول هي المجال  $[10^{0,1}; +\infty[$

$$\log x < \log(1-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \\ x < 1-x \end{cases} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ x < 1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1/2$$

إذن : مجموعة الحلول هي المجال  $]0; 1/2[$

#### التمرين 58

حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$2y' + 5y = 0 \quad (3) \quad y' = 3y \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}y' = 4y \quad (4) \quad y' + 2y = 0 \quad (2)$$

الحل - 58

بالرجوع إلى الدرس لدينا حل المعادلة التفاضلية من الشكل  $y' = ay$  حيث  $a \in \mathbb{R}^*$  هي الدوال من الشكل  $y = ce^{ax}$  حيث  $c \in \mathbb{R}^*$  كما يلي :  
 (1)  $y' = 3y$  إذن :  $y = ce^{3x}$  حيث  $c$  ثابت حقيقي .

$$(2) \quad y' + 2y = 0 \quad \text{أي} \quad y' = -2y \quad \text{منه : } y = ce^{-2x} \quad \text{حيث } c \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$(3) \quad 2y' + 5y = 0 \quad \text{أي} \quad y' = -\frac{5}{2}y \quad \text{منه : } y = ce^{-\frac{5}{2}x} \quad \text{حيث } c \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$(4) \quad \frac{1}{2}y' = 4y \quad \text{أي} \quad y' = 8y \quad \text{منه : } y = ce^{8x} \quad \text{حيث } c \text{ ثابت حقيقي .}$$

التمرين - 59

1 - حل المعادلة التفاضلية  $2y' + y = 0$ 2 - عين الحل الخاص  $f$  الذي يحقق  $f(\ln 4) = 1$ 

الحل - 59

$$1 - 2y' + y = 0 \quad \dots (\alpha) \quad \text{إذن : } y' = \frac{-1}{2}y$$

$$\text{منه : } y = ce^{\frac{-1}{2}x} \quad \text{حيث } c \text{ ثابت حقيقي .}$$

2 - لتكن  $f$  حل للمعادلة التفاضلية  $(\alpha)$  إذن :  $f(x) = ce^{\frac{-1}{2}x}$  مع  $c$  ثابت حقيقي .

$$f(\ln 4) = 1 \Leftrightarrow ce^{\frac{-1}{2} \ln 4} = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow c \left[ \frac{1}{e^{\frac{1}{2} \ln 4}} \right] = 1$$

$$(e^{\frac{1}{2} \ln 4})^{-1} = e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \ln 2} = e^{\ln 2} \quad \text{إذن} \quad c \left( \frac{1}{e^{\ln 2}} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow c/2 = 1$$

$$\Leftrightarrow c = 2$$

نتيجة :  $f(x) = 2e^{\frac{-1}{2}x}$  هي الحل الخاص المطلوب .

التمرين - 60

$f$  هي حل المعادلة التفاضلية  $2y' + y - 5 = 0$

هل منحنى الدالة  $f$  يقبل عند  $+\infty$  مستقيماً مقارباً لمعادلته  $y = 5/2$  ؟

الحل - 60

$$\text{المعادلة } 2y' + y - 5 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad y' = \frac{-1}{2}y + 5/2 \quad (\alpha) \dots \dots \dots$$

و هي من الشكل  $y' = ay + b$ 

$$\text{منه : حلولها } y = ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{حيث } a \neq 0$$

$$\text{أي : حلول المعادلة } (\alpha) \text{ هي : } y = ce^{\frac{-1}{2}x} - \left( \frac{5/2}{-1/2} \right) \quad \text{حيث } c \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$y = ce^{\frac{-1}{2}x} + 5 \quad \text{أي :}$$

$$\text{منه : } f(x) = ce^{\frac{-1}{2}x} + 5 \quad \text{حيث } c \text{ ثابت حقيقي}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-1}{2}x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} c e^{\frac{-1}{2}x} + 5 = 5$$

إذن : منحني الدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا عند  $+\infty$  معادلته  $y = 5$  (و ليس  $5/2$ )

#### التمرين 61

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 3e^{-2x} - 4$

أوجد معادلة تفاضلية من الشكل  $y' = ay + b$  حيث تكون الدالة  $f$  حلا لها .

#### الحل - 61

يمكن حل هذا التمرين بطريقتين مختلفتين :

الطريقة الأولى :

$$f(x) = 3e^{-2x} - 4 = 3e^{-2x} - \left(\frac{-8}{-2}\right)$$

$$f(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{إذن :} \quad \begin{cases} c = 3 \\ a = -2 \\ b = -8 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

منه :  $f'$  هي حل للمعادلة التفاضلية  $y' = ay + b$

أي  $f$  هي حل للمعادلة التفاضلية  $y' = -2y - 8$

$$f'(x) = -6e^{-2x}$$

تحقيق :

$$-2f(x) - 8 = -2(3e^{-2x} - 4) - 8 = -6e^{-2x}$$

من جهة أخرى :

$$f'(x) = -2f(x) - 8$$

إذن فعلا :

$$y' = -2y - 8$$

أي :  $f$  هي حل للمعادلة

الطريقة الثانية :

$$f'(x) = -6e^{-2x}$$

$$= -2[3e^{-2x}]$$

$$= -2[3e^{-2x} - 4 + 4]$$

$$= -2[3e^{-2x} - 4] - 8$$

$$= -2f(x) - 8$$

إذن .... هي حل للمعادلة التفاضلية  $y' = -2y - 8$

#### التمرين 62

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 2e^{-5x}$

أوجد معادلة تفاضلية من الشكل  $y' = ay$  حيث تكون الدالة  $f$  حلا لها .

#### الحل - 62

$$f(x) = ce^{ax} \quad \text{إذن :} \quad \begin{cases} c = 2 \\ a = -5 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

منه :  $f$  هي حل للمعادلة التفاضلية  $y' = ay$

أي  $f$  هي حل للمعادلة التفاضلية  $y' = -5y$

$$f'(x) = -10e^{-5x} = -5(2e^{-5x}) = -5f(x) \quad \text{تحقيق :}$$

إذن :  $f$  هي فعلا حل للمعادلة  $y' = -5y$

## تمارين نماذج للبكالوريا

### التمرين 1

- 1 - حل في IR المعادلة  $2t^2 - 5t + 2 = 0$  ذات المجهول  $t$ .  
 2 - حل في  $IR^2$  الجملة :  $\begin{cases} 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0 \\ e^x \cdot e^y = 1 \end{cases}$  ذات المجهولين  $x$  و  $y$

### الحل 1

1 -  $2t^2 - 5t + 2 = 0$  معادلة من الدرجة 2 :  $\Delta = 25 - 16 = 9$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \\ t_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

إذن : مجموعة حلول المعادلة هي  $\{2; 1/2\}$

$$\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0 \\ t > 0 \text{ و } t = e^x \\ e^x \cdot e^y = 1 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0 \\ e^x \cdot e^y = 1 \end{cases} \quad \text{2 -}$$

$$\begin{cases} t = 2 \text{ أو } t = 1/2 \\ t = e^x \\ 1/e^x = e^y \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} e^x = 2 \text{ أو } e^x = 1/2 \\ y = \ln(1/e^x) = -x \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} x = \ln 2 \text{ و } y = -\ln 2 \\ x = \ln(1/2) \text{ و } y = -\ln(1/2) \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

إذن : حلول الجملة هي الثنائيات  $\{(\ln 2; -\ln 2); (\ln 1/2; -\ln 1/2)\}$

### التمرين 2

حل في IR المعادلتين التاليتين :

$$e^{x+2} - e - 2e^{-x} = 0 \quad (1)$$

$$\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2 \quad (2)$$

### الحل 2

$$e^{x+2} - e - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(e^{2x+2} - e^{x+1} - 2) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow e^{2x+2} - e^{x+1} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^2(e^x)^2 - e(e^x) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^2 t^2 - e t - 2 = 0 \dots\dots\dots (\alpha) \\ t > 0 \text{ و } e^x = t \end{cases}$$

المعادلة  $(\alpha)$  من الدرجة الثانية ذات المجهول الموجب  $t$  إذن :

$$\Delta = e^2 + 8e^2 = 9e^2 = (3e)^2$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{e-3e}{2e^2} & \text{مرفوض لانه سالب} \\ t_2 = \frac{e+3e}{2e^2} = \frac{4e}{2e^2} = \frac{2}{e} & \text{مقبول} \end{cases} \quad \text{منه :}$$

$$\begin{aligned} e^x = t_2 &\rightarrow e^x = 2/e \\ &\rightarrow x = \ln(2/e) \end{aligned} \quad \text{اذن :}$$

نتيجة : المعادلة تقبل حلا واحدا هو  $\{\ln(2/e)\}$ 

$$\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ \ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ \ln|(2x+1)(x-1)| = \ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ |2x^2 - x - 1| = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ 2x^2 - x - 1 = 2 \text{ أو } 2x^2 - x - 1 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ 2x^2 - x - 3 = 0 \text{ أو } 2x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

المعادلة $2x^2 - x - 3 = 0$	المعادلة $2x^2 - x + 1 = 0$
$\Delta = 1 + 24 = 25$	$\Delta = 1 - 8 = -7$
$\begin{cases} x_1 = \frac{1-5}{4} = -1 \\ x_2 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$	لا تقبل حولا في R

نتيجة :

$$\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ x = -1 \text{ أو } x = 3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-1; 3/2\}$$

منه : حلول المعادلة هي  $\{-1; 3/2\}$ 

التمرين 3

f دالة معرفة على  $]0; +\infty[$  بـ  $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$ 

$$1 - \text{أحسب } f'(x) \text{ ثم بين أن } f'(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$$

2 - استنتج جدول تغيرات الدالة f على المجال  $]0; +\infty[$  (دون حساب النهاية عند  $+\infty$ )3 - أثبت أن من أجل كل x من  $]0; +\infty[$  :  $\ln x < \sqrt{x}$ 4 - بين أن من أجل كل x حيث  $x > 1$  فإن :  $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ 

$$5 - \text{أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \text{ ثم استنتج } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

الحل 3

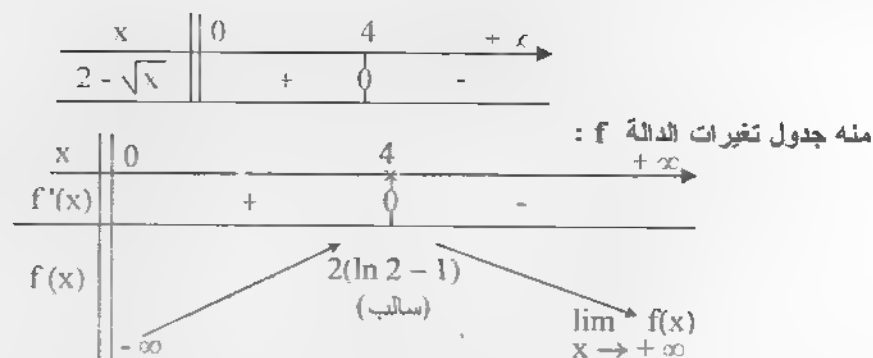
$$1 - f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{x}}{2x} \text{ وهو المطلوب}$$

2 - إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$  هي إشارة  $2 - \sqrt{x}$  لأن  $2x > 0$  كما يلي :





$$f(4) = \ln 4 - \sqrt{4} = 2 \ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - \sqrt{0} = -\infty$$

لاحظ أن الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $[4; +\infty[$

و بما أن  $f(4) < 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$

3 - من جدول تغيرات الدالة  $f$  نستنتج أن من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  فإن  $f(x) < 0$  أي  $\ln x - \sqrt{x} < 0$  منه  $\ln x < \sqrt{x}$  و هو المطلوب .

4 - لدينا :  $\begin{cases} \ln x < \sqrt{x} \\ 1/x > 0 \end{cases}$  إذن :  $\begin{cases} \ln x < \sqrt{x} \\ x > 1 \end{cases}$

منه :  $\frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$  (ضرب الطرفين في  $1/x$ )

أي  $\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$  ..... (α)

من جهة أخرى :  $x > 1$  إذن :  $\ln x > 0$  أي  $\frac{\ln x}{x} > 0$  ..... (β)

نتيجة : من العلاقتين (α) و (β) نستنتج أن :  $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

5 -  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = 0$

حسب بطريقة الحصر :  $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$  إذن  $0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} < 0$

أي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

ملاحظة : هذه النتيجة ستستعمل في التمارين المقبلة .

#### التمرين 4 -

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = a e^{2x} + b e^x + c$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية .

نسمي (C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 - عين  $a, b, c$  حتى يشمل المنحنى (C) النقطة  $O(0; 0)$  و  $f'(\ln(3/4)) = 0$  و المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب للمنحنى (C) عند  $-\infty$

لتكن الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 2 e^{2x} - 3 e^x + 1$

2 - احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3 - أدرس تغيرات الدالة  $f$

4 - حدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل .

5 - عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

6 - أنشئ المنحنى (C)

الحل - 4

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \quad -1$$

ان: يكون المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب للمنحنى (C) عند  $-\infty$  إذا و فقط إذا كان :  
 $f(x) = a e^{2x} + b e^x + 1$  : منه  $c = 1$

المنحنى (C) يشمل المبدأ (0:0) إذن :  $f(0) = 0$  أي :  $a + b + 1 = 0$  ..... (α)  
 $f'(x) = 2 a e^{2x} + b e^x$  إذن :  $f'(\ln(\frac{3}{4})) = 2 a (\frac{3}{4})' + b (\frac{3}{4}) = \frac{3}{4} (\frac{3}{2} a + b)$

$$f'(\ln(\frac{3}{4})) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} a + b = 0 \quad \text{منه :}$$

$$\Leftrightarrow 3 a + 2 b = 0 \quad \text{..... (β)}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 2 a + 2 b = -2 \\ 3 a + 2 b = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} a + b = -1 \\ 3 a + 2 b = 0 \end{cases} \text{ لنحل الجملة}$$

أخيرا :  $a = 2$  ;  $b = -3$  ;  $c = 1$  أي  $f(x) = 2 e^{2x} - 3 e^x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (2 e^x - 3 + e^{-x}) = +\infty \quad -2$$

$$f'(x) = 4 e^{2x} - 3 e^x \quad \text{و دالتها المشتقة :} \quad -3$$

ان: إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $4 e^x - 3$  كمايلي :

$$4 e^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 3/4$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq e^{\ln(3/4)}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \ln(3/4)$$

x	$-\infty$	$\ln(3/4)$	$+\infty$
$4 e^x - 3$	-	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$\alpha$	$\ln(3/4)$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	0	$-1/8$	0	$+\infty$

$$f(\ln(\frac{3}{4})) = 2(\frac{3}{4})^2 - 3(\frac{3}{4}) + 1 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{9 - 18 + 8}{8} = -\frac{1}{8}$$

4 - نقاط التقاطع مع حامل محور الفواصل :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 e^{2x} - 3 e^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^x : y > 0 \\ 2 y^2 - 3 y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^x : y > 0 \\ 2(y-1)(y-\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ \text{أو} \\ e^x = 1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 1 \\ \text{أو} \\ x = \ln(1/2) \end{cases}$$

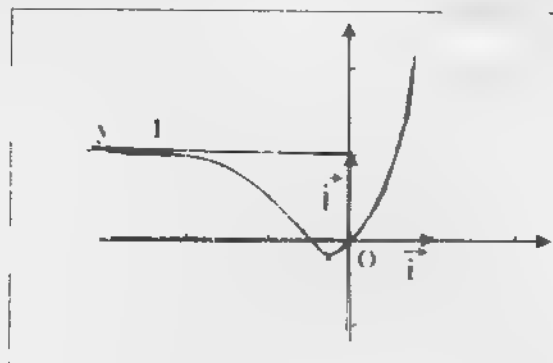
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = -\ln 2 \end{cases}$$

نتيجة : الممضي (C) يقطع حاصر محور الفواصل في بعض احوالهما  $(0:0) \pm (-\ln 2:0)$   
5 - معادلة التماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل :  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 4 \end{aligned}$$

حيث :  $f(x) = 2e^{2x} - e^x$

6 - الاستاء :



تغيرين-5

كان المعادلتين التفاضليتين :  $(E_1) : y' - 2y = 0$  و  $(E_2) : y' = y$

1 - حل المعادلتين  $(E_1)$  و  $(E_2)$

2 - عين الحل الخاص  $f_1$  للمعادلة  $(E_1)$  حيث  $f_1'(0) = 4$

3 - عين الحل الخاص  $f_2$  للمعادلة  $(E_2)$  حيث  $f_2(0) = 1$

4 - اداة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = 2e^{2x} - e^x$

4 - ادرس تغيرات الدالة  $g$

5 - ادر معادلة المستقيم المماس لمنحنى الدالة  $g$

6 - عين نقط تقاطع منحنى الدالة  $g$  مع محوري الإحداثيات

7 - ادر منحنى الدالة  $g$  في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس .

الحل :-5

1 - لنكر  $y' - 2y = 0$  و  $y' = y$  حقيقي

$$y' = 2y$$

نحل المعادلة  $(E_1)$  هي التول من الشكل  $f(x) = e^{\alpha x}$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي

$$y' = y = \alpha e^{\alpha x}$$

نحل المعادلة  $(E_2)$  هي التول من الشكل  $f(x) = \alpha e^x$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي

2 -  $f_1$  حل للمعادلة  $(E_1)$  لن

$$f(x) = e^{\alpha x}$$

$$f'(x) = 2e^{\alpha x}$$

$$f'(0) = 4 \Rightarrow 2e^{\alpha \cdot 0} = 4$$

$$2e^{\alpha \cdot 0} = 4$$

$$f(x) = 2e^x \text{ و هي دالة 1 مضبوطة}$$

3 -  $f_2$  حل للمعادلة  $(E_2)$  لن

$$f(x) = \alpha e^x$$

$$f'(0) = \alpha$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$f(x) = e^x \text{ و هي دالة 1 مضبوطة}$$

4 - تغيرات الدالة  $g$  :  $(g(x) = f_1(x) - f_2(x))$

$g$  معرفة على  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{2x} - e^x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{2x} - e^x) = +\infty$$

$g$  ولة تلتصق على  $\mathbb{R}$  : دلها المشقة :

$$g'(x) = 4e^{2x} - e^x = e^x(4e^x - 1)$$

نل : ادر  $g'(x)$  هي ادر  $4e^x - 1$  لن  $e^x > 0$  كدني :

$$4e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{4}$$

$x$	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$4e^x - 1$	$-$	$0$	$+$

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	0	$-\frac{1}{8}$	$+\infty$

$\Leftrightarrow x \geq \ln(1/4)$   
 $\Leftrightarrow x \geq -\ln 4$   
 منه جدول تغيرات الدالة g :

$$g(-\ln 4) = 2(4^{-2}) - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

5 - بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$  فإن المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  (محور الفواصل) مقارب لمنحنى الدالة g عند  $-\infty$ .

6 - النقاط مع محور الترتيب :  $g(0) = 2 - 1 = 1$

إذن : منحنى الدالة g يقطع حامل محور الترتيب عند النقطة  $(0; 1)$

النقاط مع محور الفواصل :  $g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2e^x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0$$

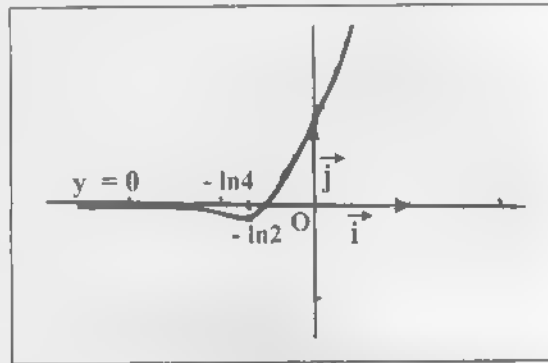
$$\Leftrightarrow e^x = 1/2$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(1/2)$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln 2$$

إذن : منحنى الدالة g يقطع حامل محور الفواصل في النقطة  $(-\ln 2; 0)$

7 - الإنشاء :



التمرين 6 -

الجزء I : f دالة معرفة على  $I = ]-1/2; +\infty[$  بـ  $f(x) = \ln(1 + 2x)$

1 - بين أن f متزايدة تماماً على I .

2 - أحسب نهاية f(x) لما x يؤول إلى  $-1/2$  - بقم كبرى .

لتكن g دالة معرفة على I بـ  $g(x) = f(x) - x$

3 - أدرس تغيرات الدالة g على المجال I .

4 - بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  حيث  $1 < \alpha < 2$

5 - استنتج إشارة g(x) على المجال I .

6 - بين أن من أجل كل x من المجال  $]\alpha; 0[$  فإن  $f(x) \in ]0; \alpha[$

الجزء II : نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  معرفة بـ  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$

1 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n :  $u_n \in ]0; \alpha[$

2 - برهن بالتراجع أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة

3 - بين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

الحل 6 -

الجزء I :

1 - f قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة :  $f'(x) = \frac{2}{1+2x}$

إذن : من أجل كل x من I فإن  $f'(x) > 0$  لأن  $(1+2x) > 0$

منه : f متزايدة تماماً على المجال I .

2 -  $\lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2} \ln(1+2x) = \lim_{y \rightarrow 0} \ln y = -\infty$

3 - تغيرات الدالة g : g معرفة على  $]-1/2; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -1/2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2^+} \ln(1+2x) - x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1/2^+} \ln(1+2x) = -\infty \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2x) - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x) \left[ \frac{\ln(1+2x)}{(1+2x)} - \frac{x}{1+2x} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} y \text{ إذن } y = 1+2x \text{ نضع } = \lim_{y \rightarrow +\infty} y \left[ \frac{\ln y}{y} - \frac{1}{2} \right]$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0 \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow +\infty} y \left( -\frac{1}{2} \right) = -\infty$$

g قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{2-1-2x}{1+2x} = \frac{1-2x}{1+2x}$$

اذن : إشارة g'(x) هي إشارة 1-2x لأن (1+2x) > 0

x	-∞	1/2	+∞
1-2x	-	0	+

منه جدول تغيرات الدالة g على المجال ]-1/2 ; +∞[ :

x	-1/2	0	1/2	α	+∞
g'(x)		+	0	-	
g(x)		↗	ln 2 - 1/2	↘	

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1+1) - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$$

4- من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن g تتعدم مرتين أي المعادلة g(x) = 0 تقبل حلين في المجال I .

$$g(0) = \ln 1 - 0 = 0 \text{ إذن : أحد حلول المعادلة } g(x) = 0 \text{ هو } 0$$

الحل الآخر :

$$g(1) = \ln(1+2) - 1 = \ln 3 - 1 > 0$$

$$g(2) = \ln(1+4) - 2 = \ln 5 - 2 < 0$$

لدينا } g مستمرة على المجال [1 ; 2]

$$g(1) \times g(2) < 0 \}$$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا α حيث 1 < α < 2 و هو المطلوب .

5- بملاحظة جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة g(x) كمايلي :

x	-1/2	0	1	α	2	+∞
g(x)		-	0	+	0	-

6- حسب السؤال (1) فإن f متزايدة تماما على I و خاصة على [0 ; α]

$$f(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0 \text{ لدينا :}$$

$$f(α) = g(α) + α = α \text{ لأن } g(α) = 0$$

اذن : جدول تغيرات الدالة f على المجال [0 ; α] هو كمايلي :

x	0	1	α
f(x)	↗		α

نتيجة : من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; \alpha[$  فإن  $f(x) \in ]0; \alpha[$  و هو المطلوب . (لأن  $f$  مستمرة)  
الجزء II :

1 - البرهان بالتراجع أن :  $u_n \in ]0; \alpha[$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$

من أجل  $n=0$  :  $u_0 = 1$  و  $0 < 1 < \alpha$  محقق .

من أجل  $n=1$  :  $u_1 = f(u_0)$  أي  $u_1 = f(1)$  أي  $0 < u_1 < \alpha$  لأن  $0 < f(1) < \alpha$

منه : الخاصية محققة من أجل  $n=0$  و  $n=1$

نفرض أن  $0 < u_n < \alpha$  من أجل  $n > 1$

هل  $0 < u_{n+1} < \alpha$  ؟

لدينا :  $0 < u_n < \alpha$  إذن :  $0 < f(u_n) < \alpha$  أي  $0 < u_{n+1} < \alpha$

منه : الخاصية محققة من أجل  $(n+1)$  .

نتيجة : من أجل كل  $n$  من  $N$  فإن  $0 < u_n < \alpha$  .

2 - البرهان بالتراجع أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة :

من أجل  $n=1$  :  $u_1 - u_0 = f(1) - 1 = g(1)$  :  $n=1$

لكن حسب جدول إشارة  $g(x)$  فإن  $g(1) > 0$

إذن :  $u_1 - u_0 > 0$

منه :  $(u_n)$  متزايدة من أجل  $n \in \{0; 1\}$

نفرض أن  $(u_n)$  متزايدة من أجل  $n > 1$

هل  $u_{n+1} - u_n > 0$  ؟

لدينا  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$

لكن من أجل كل  $n$  من  $N$  فإن  $0 < u_n < \alpha$

و حسب جدول إشارة  $g(x)$  فإن  $g(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $]0; \alpha[$

إذن :  $g(u_n) > 0$

منه :  $u_{n+1} - u_n > 0$

أي : الخاصية محققة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل  $n$  من  $N$  :  $(u_n)$  متزايدة .

3 - لدينا  $(u_n)$  محدودة و متزايدة إذن : فهي متتالية متقاربة .

التمرين 7-

$f$  دالة معرفة على المجال  $[0; 1]$  بـ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 : x=0 \\ 0 : x=1 \\ \ln(x) \times \ln(1-x) : x \in ]0; 1[ \end{cases}$$

نسمي  $(C)$  منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{I}; \vec{J})$

نقبل أن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$  و من أجل  $\alpha > 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$

1 - عين  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$  ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

2 - بين أن من أجل كل  $x$  من المجال  $] -1/2; 1/2[$  :  $f(\frac{1}{2} - x) = f(\frac{1}{2} + x)$  . فسر النتيجة هندسيا .

لتكن  $\phi$  دالة معرفة على  $]0; 1[$  بـ  $\phi(x) = (1-x) \ln(1-x) - x \ln x$

3 - احسب  $\phi'(x)$  ثم بين أن  $\phi''(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$  (الدالة المشتقة الثانية)

4 - استنتج تغيرات الدالة  $\phi'$

5 - بين أن  $\phi'$  تتعدم عند قيمتين  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  من المجال  $]0; 1[$

6 - استنتج إشارة  $\phi'$  على المجال  $]0; 1[$

7 - عين  $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} \phi(x)$  و  $\phi(1/2)$

8 - استنتج إشارة  $\phi(x)$  على المجال  $]0; 1[$

- 9 - بين أن  $f'(x)$  لها نفس إشارة  $\phi(x)$  على  $]0; 1[$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .
- 10 - بين أن من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; 1[$  :  $0 \leq (\ln x)(\ln(1-x)) \leq (\ln 2)^2$

الحل - 7

1 - نعرف الدالة  $g$  بـ :  $g(x) = \ln(1-x)$ إذن :  $g$  قابلة للاشتقاق على  $] -\infty; 1[$  و دالتها المشتقة :  $g'(x) = \frac{-1}{1-x}$ منه :  $g'(0) = -1$ لكن حسب تعريف العدد المشتق عند 0 :  $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ إذن :  $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) - 0}{x}$ أي :  $-1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$ منه :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$  و هو المطلوبلدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x [\ln(1-x)]}{x}$ 

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \ln x \left[ \frac{\ln(1-x)}{x} \right]$$

حسب السؤال (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)(-1)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \text{لأن} \quad = +\infty$$

$$2 - \text{ليكن } -1/2 < x < 1/2 \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} 0 < \frac{1}{2} - x < 1 \\ 0 < \frac{1}{2} + x < 1 \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} -1/2 < -x < 1/2 \\ 0 < \frac{1}{2} + x < 1 \end{array} \right\}$$

$$f\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) \left[ \ln\left(1 - \frac{1}{2} + x\right) \right] \quad \text{و لدينا :}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) \left[ \ln\left(\frac{1}{2} + x\right) \right]$$

$$f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \ln\left(\frac{1}{2} + x\right) \left[ \ln\left(1 - \frac{1}{2} - x\right) \right] \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2} + x\right) \left[ \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) \right]$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) \left[ \ln\left(\frac{1}{2} + x\right) \right]$$

$$f\left(\frac{1}{2} - x\right) = f\left(\frac{1}{2} + x\right) : \text{نتيجة : من أجل كل } x \text{ من } ]-1/2; 1/2[$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة  $x = 1/2$  هو محور تناظر للمنحنى (C)

$$\phi'(x) = -\ln(1-x) + \frac{-1}{1-x} (1-x) - \left[ \ln x + \frac{1}{x} (x) \right] \quad - 3$$

$$= -\ln(1-x) - 1 - \ln x - 1$$

$$= -[\ln(1-x) + \ln x + 2]$$

$$\phi''(x) = -\left[ \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{x} \right]$$

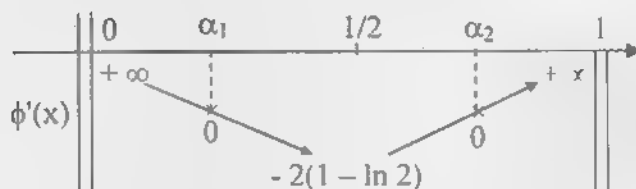
منه :

$$- \left[ \frac{-x+1}{x(1-x)} \right]$$

$$= \frac{2x-1}{x(1-x)} \text{ وهو المطلوب .}$$

4 - تغيرات الدالة  $\phi'$ :لدينا  $\phi''(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$  منه جدول إشارة  $\phi''(x)$  كمايلي:

x	0	1/2	1
$2x-1$	-	0	+
$x(1-x)$		+	
$\phi''(x)$	-	0	+

منه جدول تغيرات الدالة  $\phi'(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} - [\ln(1-x) + \ln x + 2] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \phi'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} - [\ln(1-x) + \ln x + 2] = +\infty$$

$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = - \left[ \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \right] = - \left[ 2 \ln \frac{1}{2} + 2 \right] = -2 [1 - \ln 2]$$

5 - بملاحظة جدول تغيرات الدالة  $\phi'$  نستنتج أن يوجد قيمتين  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$ بحيث  $\phi'(\alpha_1) = 0$  و  $\phi'(\alpha_2) = 0$  لأن  $\phi'(1/2) < 0$  إذن المعادلة  $\phi'(x) = 0$ تقبل حلا على المجال  $]0; 1/2[$  و آخر على المجال  $]1/2; 1[$  أي المعادلة  $\phi'(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$ 6 - دائما بملاحظة جدول تغيرات الدالة  $\phi'$  نستنتج مايلي:

x	0	$\alpha_1$	1/2	$\alpha_2$	1
$\phi'(x)$	+	0	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x) \ln(1-x) - x \ln x \quad - 7$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 \ln 1 - x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0 \text{ لأن حسب المعطيات نقبل أن } = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^1 \ln x = 0 \text{ أي}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \ln(1-x) - x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 1-x = \lim_{y \rightarrow 0} y \text{ لأن } = \lim_{y \rightarrow 0} y \ln y - 1 \ln 1$$

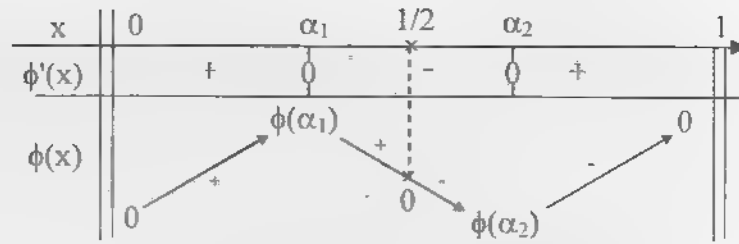
$$= 0 - 0$$

$$= 0$$

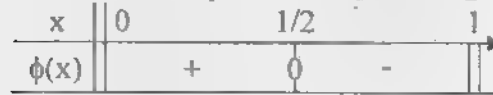
$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

8 - لاستنتاج جدول إشارة  $\phi(x)$  على المجال  $]0; 1[$  نقوم أولابرسم جدول تغيرات الدالة  $\phi$  على المجال  $]0; 1[$  كما يلي:





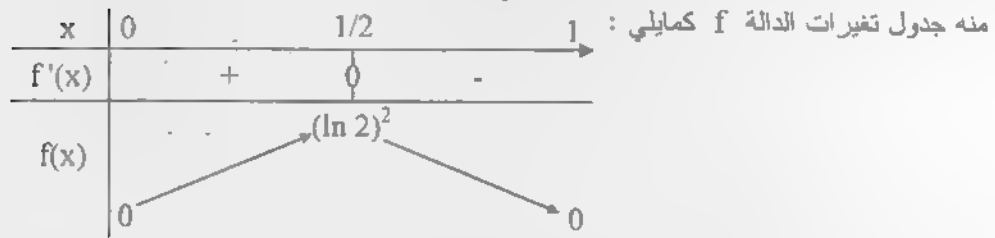
منه جدول إشارة  $\phi(x)$  على المجال  $]0; 1[$  كمايلي :



9 - الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; 1[$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \ln(1-x) + \left(\frac{-1}{1-x}\right) \ln x \\ &= \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} \\ &= \frac{(1-x) \ln(1-x) - x \ln x}{x(1-x)} \\ &= \frac{\phi(x)}{x(1-x)} \end{aligned}$$

إذن : إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]0; 1[$  هي إشارة  $\phi(x)$  لأن  $x(1-x) > 0$



$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\ln \frac{1}{2}\right)^2 = (-\ln 2)^2 = (\ln 2)^2$$

10 - من جدول تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0; 1[$  نستنتج أن :

$$0 \leq f(x) \leq (\ln 2)^2 \quad : ]0; 1[ \text{ من } x$$

$$\text{أي من أجل كل } x \text{ من } ]0; 1[ : 0 \leq (\ln x)(\ln(1-x)) \leq (\ln 2)^2 \text{ و هو المطلوب .}$$

**التمرين 8 -**

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \ln x \quad \text{بـ} \quad ]0; +\infty[ \text{ معرفة على } f$$

نسمي (C) منحنىها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

$$1 - \text{أدرس تغيرات الدالة } g \text{ المعرفة على } ]0; +\infty[ \text{ بـ } g(x) = x - 1 + \ln x$$

$$2 - \text{تحقق أن } g(1) = 0 \text{ ثم إستنتج إشارة } g(x)$$

$$3 - \text{بين أن من أجل كل } x \text{ من } ]0; +\infty[ : f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$4 - \text{إستنتج إشارة } f'(x)$$

$$5 - \text{أدرس نهاية الدالة } f \text{ عند } 0 \text{ و } +\infty$$

$$6 - \text{شكل جدول تغيرات الدالة } f$$

$$7 - \text{أنشئ بدقة المنحنى (C)}$$

**الحل - 8**

$$1 - \text{تغيرات الدالة } g : g \text{ معرفة على } ]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 - 1 + \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \ln x = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

إذن : من أجل كل x من  $]0; +\infty[$  فإن  $g'(x) > 0$  :  
منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	$-\infty$	0	$+\infty$

$$g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0 \quad -2$$

إذن  $g(1) = 0$  أي الدالة g تتعدم مرة واحدة على  $]0; +\infty[$  ( انظر جدول التغيرات )

x	0	1	$+\infty$
g(x)	-	0	+

3 - f قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[ \frac{x-(x-1)}{x^2} \right] \ln x + \frac{1}{x} \left( \frac{x-1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} (x-1) \\ &= \frac{1}{x^2} (\ln x + x - 1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x^2} g(x) \quad \text{و هو المطلوب .}$$

4 - لدينا  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  إذن : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $g(x)$  لأن  $x^2 > 0$  على المجال  $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x} \ln x \quad -5$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} \ln x$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{لأن } = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1 \quad \text{لأن } = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

6 - جدول تغيرات الدالة f :

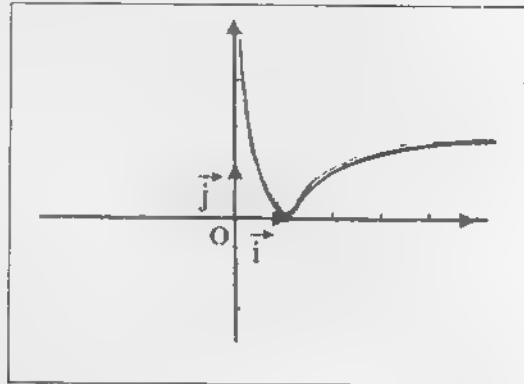
x	0	1	$+\infty$
f'(x)		0	+
f(x)	$+\infty$	0	$+\infty$

$$f(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \ln 1 = 0$$

7 - الإنشاء :  
لاحظ أن

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x-1}{x} \ln x - \ln x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \left[ \frac{x-1}{x} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{x} \end{aligned}$$

= 0 إذن منحنى الدالة  $f$  مقارب لمنحنى الدالة  $\ln x$  في جوار  $+\infty$



التمرين 9 -

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$  و (C) منحنها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 - أدرس تغيرات الدالة  $f$

2 - بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = 2x$  مقارب للمنحنى (C) عند  $+\infty$

3 - أنشئ بعناية المنحنى (C)

$k$  عدد حقيقي موجب تماما

4 - ناقش حسب قيم  $k$  عدد حلول المعادلة  $e^{2x} - e^x + 1 - k = 0$  تحليليا ثم باستعمال منحنى الدالة  $f$ .

الحل - 9

1 - تغيرات الدالة  $f$  : معرفة على  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \ln 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln [e^x(e^x - 1 + e^{-x})] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln e^x + \ln(e^x - 1 + e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(e^x - 1 + e^{-x}) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$$

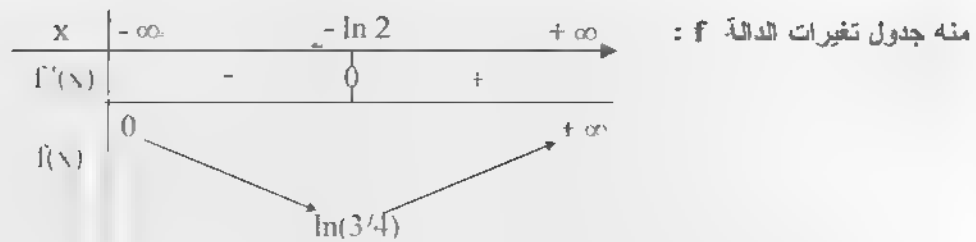
$$\frac{e^x}{e^{2x} - e^x + 1} > 0 \quad \text{لأن} \quad (2e^x - 1) \text{ هي إشارة } f'(x) \text{ منه :}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > 1/2$$

$$\Leftrightarrow x \geq \ln(1/2)$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\ln 2$$



$$f(-\ln 2) = \ln(e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{1-2+4}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^{2x} - e^x + 1) - 2x] \quad -2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$$

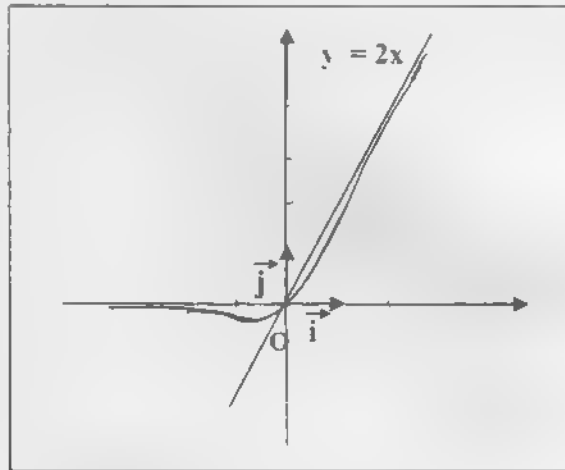
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \ln 1 = 0$$

إذن : المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = 2x$  مقارب مائل للمنحنى (C) عند  $+\infty$

3 - الإنشاء :



$$(\alpha) \dots \dots \dots e^{2x} - e^x + 1 - k = 0 : k > 0 \quad -4$$

طريقة الحل تحليليا : نضع  $e^x = y$  حيث  $y > 0$

$$\text{اذن : } y^2 - y + 1 - k = 0 \text{ حيث } y > 0$$

$$\text{منه : } \Delta = 1 - 4(1 - k) = 4k - 3$$

$k$	0	$3/4$	$+\infty$
$\Delta = 4k - 3$		0	+

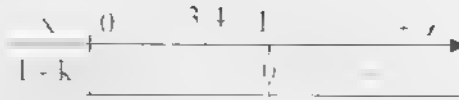
نتيجة : لما  $0 < k < 3/4$  : المعادلة لا تقبل حلا في IR

لما  $k = 3/4$  : المعادلة تقبل حلا مضاعفا  $y = 1/2$

لما  $k > 3/4$  : المعادلة تقبل حلان مختلفان هما  $y_1 > 0$  و  $y_2 = \frac{1 - \sqrt{4k - 3}}{2}$

لنبحث عن إشارة الحل  $y_2$  :

لدينا  $y_1 \times y_2 = 1 - k$  إذن : إشارة  $y_2$  هي إشارة  $(1 - k)$  لأن  $y_1 > 0$  كما يلي :



خلاصة :

لما  $0 < k < 3/4$  : المعادلة  $(\alpha)$  لا تفر حلاً في  $\mathbb{R}$   
لما  $k = 3/4$  : المعادلة  $(\alpha)$  تفر حلاً مضاعفاً  $x = 1/2$  أي  $x = \ln(1/2)$   
لما  $3/4 < k < 1$  : المعادلة  $(\alpha)$  تفر حلين  $x_1$  و  $x_2$  حيث  $x_1 = e^{\alpha}$  و  $x_2 = \ln y_2$   
أي  $x_1 = \ln y_1$  و  $x_2 = \ln y_2$   
لما  $k \geq 1$  : المعادلة  $(\alpha)$  تفر حلاً واحداً  $x = e^{\alpha}$  أي  $x = \ln y$

طريقة الحل باستعمال منحنى الدالة  $f$  :

$$\begin{aligned} \begin{cases} k > 0 \\ e^{2x} - e^x + 1 - k = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ e^{2x} - e^x + 1 = k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \ln k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \alpha \\ \alpha = \ln k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ y = f(x) \\ y = \alpha \\ \alpha = \ln k \end{cases} \end{aligned}$$

بيانياً :  $y = f(x)$  هي معادلة المنحنى (C) $y = \alpha$  هي معادته مستقيم متحرك يوازي حامل محور الفواصل .

ن : حلول المعادلة  $e^{2x} - e^x + 1 - k = 0$  هي  $x = e^{\alpha}$  و  $x = \ln y$  حيث  $y = e^{\alpha}$  مع نسحي (C)  
ن : بملاحظة منحنى  $f$  نلاحظ :  
لما  $\alpha < \ln(3/4)$  : لا يوجد نقط تقاطع بين المنحنى  $f$  و المستقيم  $y = \alpha$  .  
لما  $\alpha = \ln(3/4)$  : يوجد نقطة تقاطع واحدة بين المنحنى  $f$  و المستقيم  $y = \alpha$  .  
لما  $\ln(3/4) < \alpha < 0$  : يوجد نقطتين متساويتين بين المنحنى  $f$  و المستقيم  $y = \alpha$  .  
لما  $\alpha \geq 0$  : يوجد نقطتين متساويتين بين المنحنى  $f$  و المستقيم  $y = \alpha$  .

خلاصة :  $\alpha < \ln k \Leftrightarrow k < e^{\alpha}$ 

لما :  $\alpha < \ln(3/4)$  أي  $0 < e^{\alpha} < 3/4$  أي  $0 < k < 3/4$  : المعادلة لا تقبل حلاً  
لما :  $\alpha = \ln(3/4)$  أي  $e^{\alpha} = 3/4$  أي  $k = 3/4$  : المعادلة تقبل حلاً واحداً مضاعفاً .  
لما :  $\ln(3/4) < \alpha < 0$  أي  $3/4 < e^{\alpha} < e^0$  أي  $3/4 < k < 1$  : المعادلة تقبل حلين .  
لما :  $\alpha \geq 0$  أي  $e^{\alpha} \geq e^0$  أي  $k \geq 1$  : المعادلة تقبل حلاً واحداً .

التمرين 10

f دالة معرفة على  $] -1; 1[$  بـ  $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  نسمي (C) منحنىهافي مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 

1 - ادرس تغيرات الدالة f

2 - عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C)

3 - أثبت أن مبدأ المعلم هو مركز تناظر للمنحنى (C)

4 - اكتب معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0

5 - أنشئ المنحنى (C)

6 - بين أن من أجل كل  $y$  من  $\mathbb{R}$  فإن المعادلة  $f(x) = y$  تقبل حلاً واحداً يطلب عبارته بدلالة y7 - نرسم بـ (C') إلى المنحنى الممثل للدالة  $x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

اشرح لماذا (C) و (C') متناظران بالنسبة الى المستقيم ذو المعادلة  $y = x$   
الحل - 10

1 - تغيرات الدالة  $f : \Gamma$  دالة معرفة على  $]-1; 1[$

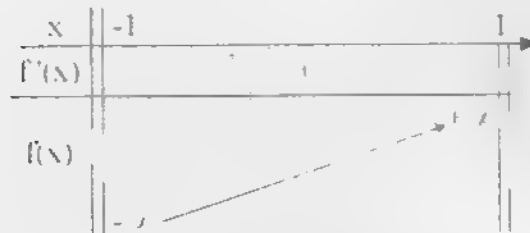
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2}{1-x} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln y = +\infty$$

$f$  قابلة للاستغراق على  $]-1; 1[$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

منه : من اجل كل  $x$  من  $]-1; 1[$  فان  $f'(x) > 0$  لان  $(1-x)(1+x) > 0$   
منه : جدول تغيرات الدالة  $f$  :



2 - المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$  مغارب للمنحنى (C) من اليمين .  
المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  مغارب للمنحنى (C) من اليسار .

3 - لدينا  $-1 < x < 1$  اذن :  $-1 < -x < 1$  اي  $f(-x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right)$  و  $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$

$$-f(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right)$$

من جهة اخرى :  $f(-x) = -f(x)$  اي  $f$  فردية .

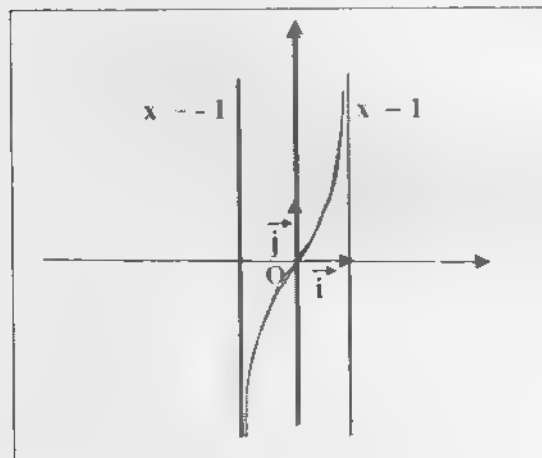
منه : المبدأ  $O(0;0)$  هو مركز تناظر للمنحنى (C) .

4 - المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 له المعادلة :  $y = f'(0)(x-0) + f(0)$  حيث :

$$f'(0) = \frac{1}{1 \times 1} = 1 \text{ و } f(0) = \frac{1}{2} \ln 1 = 0$$

منه : معادلة المماس هي :  $y = x$

5 - الإنشاء :



$$6 - \left. \begin{aligned} & \text{الدالة } f \text{ مستمرة و متزايدة تماما على المجال } ]-1; 1[ \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \end{aligned} \right\}$$

إذن : المعادلة  $f(x) = y$  تقبل حلا وحيدا على المجال  $] -1 ; 1 [$  من أجل كل  $y$  من  $\mathbb{R}$ .  
البحث عن عبارة  $x$  بدلالة  $y$  :

$$\begin{aligned} f(x) = y & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2y \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{1+x}{1-x} = e^{2y} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1+x = e^{2y}(1-x) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1+x - e^{2y} + x e^{2y} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x(1 + e^{2y}) + 1 - e^{2y} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \end{cases} \end{aligned}$$

نتيجة :  $x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$  و هي عبارة  $x$  بدلالة  $y$ .

7 - لتكن  $M(x; y)$  نقطة من المنحنى (C)

$$\text{إذن : } -1 < x < 1 \text{ و } y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

منه البقطة  $M'(y; x)$  تنتمي إلى نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة  $y = x$

أي  $M'(y; \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1})$  (حسب السؤال 6)

أي  $M'$  تنتمي إلى منحنى الدالة  $x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$   
أي  $M'$  تنتمي إلى (C')

نتيجة : (C) و (C') متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة  $y = x$

### التمرين 11 -

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  و (C) منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

$$1 - \text{تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي } x : f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

$$2 - \text{تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي } x : f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

3 - استنتج نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$

4 - بين أن المستقيمين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  اللذين معادلاتهما على الترتيب  $y = x + 1$  و  $y = x - 1$  مقاربان للمنحنى (C) عند  $+\infty$  و  $-\infty$  على الترتيب .

5 - أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى كل من  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$

6 - أثبت أن الدالة  $f$  فردية .

7 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0; +\infty[$ 8 - أنشئ بعناية المنحنى (C) على  $\mathbb{R}$ الحل - 11

$$1 - \text{من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = x + \frac{e^x + 1 - 2e^x}{e^x + 1}$$

$$= x + \frac{1 - e^x}{e^x + 1}$$

$$= x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

و هو المطلوب  $f(x)$ 

$$2 - \text{من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} = x + \frac{-e^x - 1 + 2}{e^x + 1}$$

$$= x + \frac{-e^x + 1}{e^x + 1}$$

$$= x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

و هو المطلوب  $f(x)$ 

$$3 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} = +\infty$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ -2 + \frac{2}{e^x + 1} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad -2 + \frac{2}{0 + 1} = 0$$

إذن : المستقيم  $(\Delta_1)$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب للمنحنى (C) عند  $-\infty$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} - (x - 1) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1}$$

$$= 0$$

إذن : المستقيم  $(\Delta_2)$  ذو المعادلة  $y = x - 1$  مقارب للمنحنى (C) عند  $+\infty$ 5 - وضعية (C) بالنسبة إلى  $(\Delta_1)$  :

$$f(x) - (x + 1) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} - (x + 1) = \frac{-2e^x}{e^x + 1}$$

$$\text{بما أن } \frac{e^x}{e^x + 1} > 0 \quad \text{فإن} \quad \frac{-2e^x}{e^x + 1} < 0 \quad \text{أي : المنحنى (C) دائما تحت } (\Delta_1)$$

وضعية (C) بالنسبة إلى  $(\Delta_2)$  :

$$f(x) - (x - 1) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} - (x - 1)$$

$$= \frac{2}{e^x + 1} > 0$$

إذن : المنحنى (C) دائما فوق المستقيم  $(\Delta_2)$ 

$$6 - \text{من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \quad \text{فإن } (-x) \in \mathbb{R} \quad \text{و}$$

$$-x - \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)}$$



$$\begin{aligned}
 & -x - \frac{1}{1+e^x} \\
 & -x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\
 & - \left[ x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right]
 \end{aligned}$$

$$= -f(x)$$

اذا :  $f$  دالة فردية .

7 - تغيرات الدالة  $f$  على  $[0; +\infty[$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $[0; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

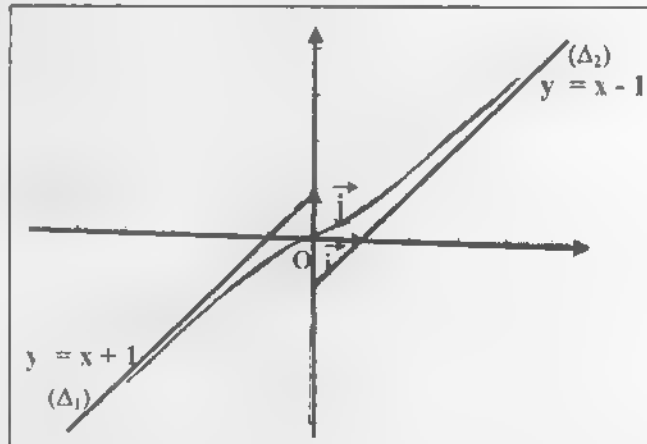
$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} \\
 &= 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $f'(x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$			+

8 - الإنشاء :



التمرين 12 -

$f$  و  $g$  دالتان قابلتان للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و تحققان الشروط التالية :

$$\left. \begin{aligned}
 (1) \quad & \text{من أجل كل عدد حقيقي } x : [f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1 \\
 (2) \quad & \text{من أجل كل عدد حقيقي } x : f(x) = g'(x) \\
 (3) \quad & f(0) = 1
 \end{aligned} \right\}$$

1 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) \neq 0$

2 - أحسب  $g(0)$

3 - باستعمال الشرط (1) بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g(x) = f'(x)$

نضع  $u = f + g$  و  $v = f - g$

4 - أحسب  $u(0)$  و  $v(0)$

5- بين أن  $u' = u$  و  $v' = -v$ 6- عين الدالتين  $u$  و  $v$ 7- إستنتج عبارتي  $f(x)$  و  $g(x)$ الحل - 121- من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$ 

$$[f(x)]^2 = 1 + [g(x)]^2 \quad \text{أي :}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x)]^2 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\Leftrightarrow 1 + [g(x)]^2 = 0$$

لكن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $[g(x)]^2 \geq 0$ 

$$1 + [g(x)]^2 \geq 1 \quad \text{اذن :}$$

$$1 + [g(x)]^2 > 0 \quad \text{منه :}$$

أي :  $f(x) \neq 0$  و هو المطلوب .

$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1 \quad \text{2- لدينا :}$$

$$[g(x)]^2 = [f(x)]^2 - 1 \quad \text{اذن :}$$

$$[g(0)]^2 = [f(0)]^2 - 1 \quad \text{أي :}$$

$$[g(0)]^2 = 1 - 1 \quad \text{أي :}$$

$$g(0) = 0 \quad \text{منه : } [g(0)]^2 = 0$$

$$3- \text{ لدينا : } [f(x)]^2 = 1 + [g(x)]^2 \quad \text{منه باشتقاق الطرفين :}$$

$$2 f'(x) \cdot f(x) = 0 + 2 g'(x) \cdot g(x)$$

$$f(x) = g'(x) \quad \text{أي : } 2 f'(x) \cdot f(x) = 2 g(x) \cdot f(x) \quad \text{لأن حسب الشرط (2)}$$

$$f(x) \neq 0 \quad \text{أي : } f'(x) = g(x) \quad \text{بقسمة الطرفين على } 2 f(x) \quad \text{لأن } f(x) \neq 0$$

منه :  $g(x) = f'(x)$  و هو المطلوب

$$4- \quad u(0) = f(0) + g(0) = 1 + 0 = 1$$

$$v(0) = f(0) - g(0) = 1 - 0 = 1$$

$$5- \quad u = f + g \quad \text{منه : } u' = f' + g'$$

$$\text{أي : } u' = g + f \quad \text{لأن : } f' = g \quad \text{و } g' = f$$

$$\text{أي : } u' = u \quad \text{و هو المطلوب}$$

$$v = f - g \quad \text{منه : } v' = f' - g'$$

$$\text{أي : } v' = g - f \quad \text{لأن : } f' = g \quad \text{و } g' = f$$

$$\text{أي : } v' = -(f - g)$$

$$\text{أي : } v' = -v \quad \text{و هو المطلوب}$$

$$6- \quad u' = u \quad \text{معادلة تفاضلية ذات المجهول } u \text{ من الشكل } y' = ay \text{ حيث } a = 1 \text{ منه } u = ce^x \text{ حيث } c \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$v' = -v \quad \text{معادلة تفاضلية ذات المجهول } v \text{ من الشكل } y' = ay \text{ حيث } a = -1 \text{ منه } v = \alpha e^{-x} \text{ حيث } \alpha \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$\text{نتيجة : } u : x \mapsto ce^x \quad \text{و } v : x \mapsto \alpha e^{-x}$$

$$7- \quad \begin{cases} u(x) + v(x) = 2 f(x) \\ g(x) = u(x) - f(x) \end{cases} \quad \text{منه : } \begin{cases} u(x) = f(x) + g(x) \\ v(x) = f(x) - g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} [u(x) + v(x)] \\ g(x) = u(x) - f(x) \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{c}{2} e^x + \frac{\alpha}{2} e^{-x} \\ g(x) = c e^x - \frac{c}{2} e^x - \frac{\alpha}{2} e^{-x} \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$\text{حيث } c \text{ و } \alpha \text{ عددين حقيقيين يطلب تعيينهما.} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{c}{2} e^x + \frac{\alpha}{2} e^{-x} \\ g(x) = \frac{c}{2} e^x - \frac{\alpha}{2} e^{-x} \end{cases} \quad \text{اي :}$$

البحث عن  $c$  و  $\alpha$  :

$$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{c}{2} + \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow c + \alpha = 2 \dots\dots\dots(1)$$

$$g(0) = 0 \Rightarrow \frac{c}{2} - \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow c - \alpha = 0 \dots\dots\dots(2)$$

بجمع (1) و (2) نحصل على :  $c = 1$  أي  $2c = 2$ بالتعويض في (1) نحصل على  $\alpha = 2 - c$  أي  $\alpha = 1$ 

$$\text{نتيجة :} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} \\ g(x) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} \end{cases} \quad \text{و هو المطلوب.}$$

**التمرين = 13**

$f$  دالة معرفة على  $[0; +\infty[$  كمايلي :  $f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$   
نسمي (C) منحنىها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 - أدرس نهاية  $f$  عند  $+\infty$ 2 - بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = 2x - 2$  مقارب للمنحنى (C)

3 - أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D)

4 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x \geq 0$  :  $f'(x) = x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$ 5 - استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x > 0$  :  $f'(x) > 0$ 6 - أحسب  $f'(0)$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ 7 - أنشئ المنحنى (C) على المجال  $[0; +\infty[$ 

8 - عين النقطة A من (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (D)

**الحل = 13**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)(2-e^{-x}) \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)(2-0) \\ = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)(2-e^{-x}) - 2x + 2 \quad -2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - x e^{-x} - 2 + e^{-x} - 2x + 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-x} + e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x}$$

$$x = \ln e^x \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(e^x)}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} y \quad \text{لأن} \quad = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y}$$

$$= 0$$

منه : المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x - 2$  مقارب للمنحنى (C) عند  $+\infty$

3 - الوضعية النسبية لـ (C) و (D) :

$$f(x) = (2x-2) - xe^{-x} + e^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

منه : إشارة  $f(x) - (2x-2)$  هي إشارة  $(1-x)$  لأن  $e^{-x} > 0$  كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
1-x	+	0	-

نتيجة :

لما  $0 \leq x < 1$  : المنحني (C) فوق (D)

لما  $x = 1$  : المنحني (C) يقطع (D)

لما  $x > 1$  : المنحني (C) تحت (D)

4 - f قابلة للاشتقاق على  $[0; +\infty[$  ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = (2 - e^{-x}) + (e^{-x})(x - 1)$$

$$= 2 - e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x}$$

$$= 2 - 2e^{-x} + xe^{-x}$$

$$= xe^{-x} + 2(1 - e^{-x}) \text{ وهو المطلوب .}$$

5 - لدينا مايلي :

$$x > 0 \Rightarrow -x < 0$$

$$\Rightarrow e^{-x} < e^0$$

$$\Rightarrow e^{-x} < 1$$

$$\Rightarrow -e^{-x} > -1$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-x} > 1 - 1$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-x} > 0$$

$$\Rightarrow 2(1 - e^{-x}) > 0$$

$$\cdot xe^{-x} > 0 \Rightarrow xe^{-x} + 2(1 - e^{-x}) > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \text{ وهو المطلوب .}$$

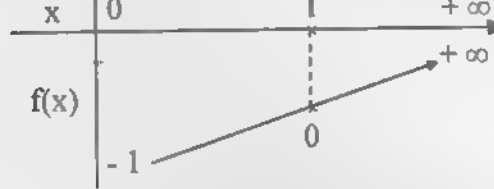
$$f'(0) = 0 + 2(1 - 1) = 0$$

6 -

منه إشارة  $f'(x)$  على  $[0; +\infty[$  :

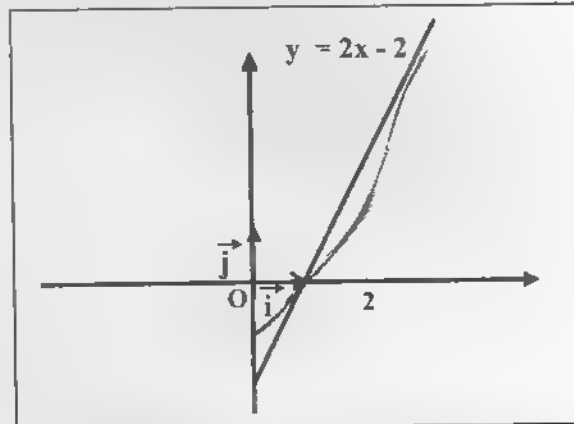
x	0	$+\infty$
f'(x)	0	+

إذن : جدول تغيرات الدالة f :



$$f(0) = (-1)(2 - 1) = -1$$

7 - الإنشاء :



8 - يكون المماس عند النقطة A ذات الفاصلة x موازيا للمستقيم (D) إذا و فقط

إذا كان ميله 2 أي  $f'(x) = 2$  كما يلي :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2 \Leftrightarrow 2 - 2e^x + xe^x = 2 \\
 &\Leftrightarrow e^x(x-2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x-2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 2
 \end{aligned}$$

إذن : النقطة المطلوبة هي  $A(2 : f(2))$

$$A(2, 2 - e^2) \text{ إذن : } f(2) = (2-1)(2 - e^2) = 2 - e^2$$

#### التمرين 14

1 أدرس تغيرات الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$   $g(t) = e^t - t - 1$

2 - ماهي القيمة الحدية الصغرى للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  ؟

3 - إستنتج أن : من أجل كل عدد حقيقي  $t$  :  $e^t \geq t + 1$  و  $e^t > t$

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$   $f(x) = x^2 - 2 \ln(e^x - x)$

4 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = x^2 - 2x - 2 \ln(1 - xe^{-x})$

5 - نقبل أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$  احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

6 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$

7 - شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  (نقبل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ )

في معلم متعامد و متجانس نعتبر القطع المكافئ (p) ذو المعادلة  $y = x^2 - 2x$  و (C) منحنى الدالة  $f$

8 - بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x^2 - 2x) = 0$  ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C) و (p)

9 - أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و (p)

10 - عين معادلة لكل من  $(D_1)$  و  $(D_2)$  مماسي المنحنيين (p) و (C) على الترتيب عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

11 - أرسم كل من (C) و (p) في نفس المعلم .

#### الحل 14

1 - تغيرات الدالة  $g$  :  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \text{ لأن } \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t - t - 1 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t} = 0 \text{ لأن } \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t (1 - t e^{-t} - e^{-t}) = +\infty$$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$g'(t) = e^t - 1$$

$$\text{منه : } g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq 1$$

$$\Leftrightarrow t \geq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow t \geq 0$$

$t$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(t)$	-	0	+

منه جدول تغيرات الدالة  $g$  :

$t$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$$g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$$

2 - من جدول التغيرات نستنتج أن الدالة  $g$  تقبل قيمة حدية صغرى على  $\mathbb{R}$  من أجل  $t = 0$  و قيمتها 0

أي : من أجل كل  $t$  من  $\mathbb{R}$  فإن :  $g(t) \geq 0$

3 - حسب السؤال (2) من أجل كل  $t$  من  $\mathbb{R}$  :  $g(t) \geq 0$

أي :  $e^t - t - 1 \geq 0$

منه :  $e^t \geq t + 1$  و هو المطلوب .

من جهة أخرى  $t+1 > t$  إذن  $e^t \geq t+1 > t$  إذن  $e^t > t$   
 نتيجة : من أجل كل  $t \in \mathbb{R}$   $e^t > t+1 > t$

$$f(x) = x^2 - 2 \ln(e^x - x) \quad - 4$$

$$\begin{aligned} & x^2 - 2 \ln[e^x(1 - x e^{-x})] \\ &= x^2 - 2 [\ln e^x + \ln(1 - x e^{-x})] \\ &= x^2 - 2 [x + \ln(1 - x e^{-x})] \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x - 2 \ln(1 - x e^{-x}) \quad - 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x - 2 \ln(1)$$

$$= +\infty$$

6-  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 2 \left( \frac{e^x - 1}{e^x - x} \right) \\ &= \frac{2x(e^x - x) - 2(e^x - 1)}{e^x - x} \\ &= \frac{2x e^x - 2x^2 - 2e^x + 2}{e^x - x} \\ &= \frac{2(x e^x - e^x - x^2 + 1)}{e^x - x} \\ &= \frac{2[e^x(x-1) - (x^2-1)]}{e^x - x} \end{aligned}$$

$$= \frac{2[e^x(x-1) - (x-1)(x+1)]}{e^x - x}$$

$$= \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x} \quad \text{وهو المطلوب .}$$

7 - لاحظ أن : حسب السؤال (3) :  $e^x \geq x+1 > x$

أي :  $e^x - x > 0$  و  $e^x - x - 1 \geq 0$   
 منه : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $(x-1)(e^x - x - 1)$  كمايلي :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$			-	+
$e^x - x - 1$	+	0	+	
الجداء	-	0	-	+

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  كمايلي :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$1 - 2 \ln(e-1)$	$+\infty$	

$$f(1) = 1 - 2 \ln(e-1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x^2 - 2x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 - 2x - 2 \ln(1 - x e^{-x}) - (x^2 - 2x)] \quad - 8 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln(1 - x e^{-x}) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln(1) = 0$$

إذن : المنحنيان (C) و (p) متقاربان عند  $+\infty$

9 - الوضعية النسبية لـ (C) و (p) :

$$f(x) - (x^2 - 2x) = -2 \ln(1 - x e^{-x})$$

لدينا :

$$= \ln(1 - x e^{-x})^{-2}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{1 - x e^{-x}}\right)^2$$

$$= \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}\right)^2$$

$$= \ln\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right)^2$$

$$= 2 \ln\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right) \quad \text{من إشارة} \quad \ln\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right) \quad \text{كمالي :}$$

$$\ln\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x - x} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq e^x - x \quad \text{لأن} \quad e^x > 0 \quad \text{و} \quad e^x - x > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -x$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

منه جدول الإشارة التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (x^2 - 2x)$	-	0	+

نتيجة : لما  $x < 0$  : المنحني (C) تحت القطع المكافئ (p)

لما  $x = 0$  : المنحني (C) يقطع القطع المكافئ (p)

لما  $x > 0$  : المنحني (C) فوق القطع المكافئ (p)

10 - معادلة المماس (D<sub>2</sub>) للمنحني (C) عند النقطة A(0 ; 0) هي :  $y = f'(0)x + f(0)$

حيث  $f(0) = 0$  و  $f'(0) = 0$  إذن :  $y = 0$

معادلة المماس (D<sub>1</sub>) للمنحني (p) عند النقطة A(0 ; 0) هي :  $y = \phi'(0)x + \phi(0)$

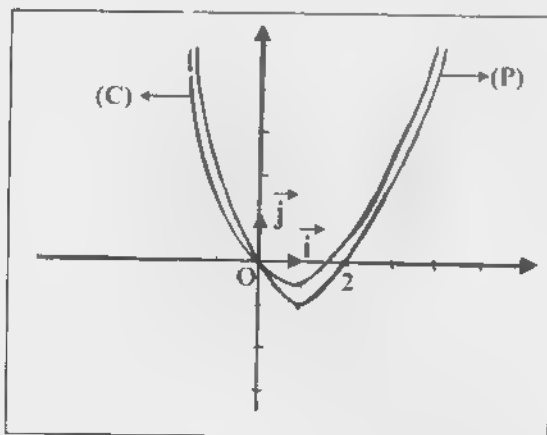
حيث  $\phi$  هي الدالة  $x \mapsto x^2 - 2x$

منه :  $\phi'(x) = 2x - 2$

أي :  $\phi'(0) = -2$

إذن : معادلة (D<sub>1</sub>) هي :  $y = -2x$

11 - الإنشاء :



التمرين 15

f دالة معرفة على  $[0 ; +\infty[$  بـ  $f(x) = e^{-x} \cos(4x)$  و  $(\Gamma)$  منحناها البياني

في مستوي منسوب إلى معاد متعامد ومتجانس  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

لتكن g دالة معرفة على  $[0 ; +\infty[$  بـ  $g(x) = e^{-x}$  و (C) منحناها في معلم  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال  $[0 ; +\infty[$  :  $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

2 - استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3 - عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين  $(\Gamma)$  و  $(C)$

لتكن  $(u_n)_{n \geq 0}$  متتالية معرفة بـ  $u_n = f\left(n \frac{\pi}{2}\right)$

4 - بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية يطلب أساسها وحدها الأول .

5 - استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  و أدرس تقاربها .

6 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  :

$$f'(x) = -e^{-x} [\cos(4x) + 4 \sin(4x)]$$

7 - أعط قيمة مقربة إلى  $10^{-1}$  لمعامل توجيه المماس  $(T)$  للمنحنى  $(\Gamma)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $\pi/2$

**الحل - 15**

1 - من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  فإن :  $\left. \begin{array}{l} e^{-x} > 0 \\ -1 < \cos 4x \leq 1 \end{array} \right\}$

منه :  $-e^{-x} \leq e^{-x} \cos 4x \leq e^{-x}$

أي :  $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$  و هو المطلوب .

2 - لدينا  $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0$

إذن : حسب نظرية الحصر فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3 - تقاطع  $(\Gamma)$  و  $(C)$  :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{-x} \cos 4x = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos(0)$$

$$(x \geq 0 \text{ لأن } k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow 4x = 2\pi k : k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} k$$

اذن :  $(\Gamma)$  و  $(C)$  يتقاطعان في مجموعة غير منتهية من النقاط

فواصلها من الشكل  $x = \frac{1}{2} \cdot k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$  لأن  $x \geq 0$

4 - لدينا من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = f\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= e^{-n\pi/2} \cos\left(4 \times n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= e^{-n\pi/2} \cos(2\pi n)$$

$$\cos 2\pi n = 1 \text{ لأن } \left(\frac{1}{e^{\pi/2}}\right)^n$$

منه :  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{e^{\pi/2}}$  وحدها الأول  $u_0 = 1$

5 - لدينا : أساس المتتالية  $(u_n)$  هو  $0 < \frac{1}{e^{\pi/2}} < 1$  و وحدها الأول  $u_0 = 1$  أي  $u_0 > 0$

إذن : المتتالية  $(u_n)$  متناقصة و مقاربة نحو 0 أي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

6 -  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[0; +\infty[$  و من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  لدينا :

$$f'(x) = -e^{-x} \cos 4x - (4 \sin 4x) e^{-x}$$

$$= -e^{-x} [\cos 4x + 4 \sin 4x]$$

7 - معامل توجيه مماس المنحنى  $(\Gamma)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $\pi/2$  هو :

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\pi/2} \left[ \cos 4 \frac{\pi}{2} + 4 \sin 4 \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= -e^{-\pi/2} [\cos 2\pi + 4 \sin 2\pi]$$

$$= -e^{-\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{e^{\pi/2}}$$

باستعمال الحاسبة .  $\approx -0.2$



## التمرين - 16

الجزء I.

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = (2x - 1)e^{-2x}$  نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{I}; \vec{J})$

1 - أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (استعمل  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \alpha e^{\alpha}$ ) فسر هندسياً .

2 - أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3 - أحسب  $f'(x)$  ثم أدرس إشارتها على  $\mathbb{R}$

4 - شكل جدول تغيرات الدالة  $f$

5 - عين إحداثيات النقطة A نقطة تقاطع المنحنى (C) بحامل محور الفواصل .

6 - استنتج إشارة  $f(x)$  من أجل  $x \in \mathbb{R}$

الجزء II

1 - بين أن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f''(x) = 4(2x - 3)e^{-2x}$  حيث  $f''$  هي الدالة المشتقة الثانية للدالة  $f$

2 - حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f''(x) = 0$

3 - لنكن B النقطة من المنحنى (C) التي فاصلتها  $1/2$  . عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند B نريد دراسة وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) لذلك نعرف الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$g(x) = f(x) - \left( \frac{2}{e}x - \frac{1}{e} \right)$$

4 - عين  $g'(x)$  ثم  $g''(x)$

5 - أدرس إشارة  $g''(x)$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $g'$  على  $\mathbb{R}$

6 - استنتج إشارة  $g'(x)$  ثم اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$

7 - عين إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  ثم استنتج وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمماس (T)

8 - أنشئ بعناية المنحنى (C) و المماس (T)

## الحل - 16

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1)e^{-2x} \quad - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{-2x} - e^{-2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{-2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -(-2xe^{-2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \alpha \quad \text{لأن} \quad = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} -\alpha e^{\alpha}$$

$$(\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \alpha e^{\alpha} = 0 \quad \text{لأن}) = 0$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مقارب للمنحنى (C) عند  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1)e^{-2x} \quad - 2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 1 &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{لأن} = -\infty$$

3 -  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x - 1) \\ &= 4e^{-2x} - 4xe^{-2x} \\ &= 4e^{-2x}(1 - x) \end{aligned}$$

منه : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $(1 - x)$  لأن  $4e^{-2x} > 0$  كما يلي :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
1-x		+	-

4 - منه جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	1/2	1	$+\infty$
f'(x)		+	0	-
f(x)			$(1/e)^2$	
	$-\infty$	0	+	0

$$f(1) = (2-1)e^{-2} = (1/e)^2$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x = 1/2$$

منه : (C) يقطع محور القواسل في النقطة  $A(1/2; 0)$ 

6 - حسب جدول تغيرات الدالة f فإن إشارة f(x) كمايلي :

x	$-\infty$	1/2	$+\infty$
f(x)		-	+

الجزء II

$$f'(x) = 4e^{-2x}(1-x)$$

1 - من أجل كل x من IR لدينا :

$$f''(x) = 4[-2e^{-2x}(1-x) - e^{-2x}]$$

منه من أجل كل x من IR فإن :

$$f''(x) = 4(-2e^{-2x} + 2xe^{-2x} - e^{-2x})$$

أي :

$$f''(x) = 4e^{-2x}(2x-3)$$

أي :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^{-2x}(2x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow x = 3/2$$

3 - معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1/2 تكتب من الشكل  $y = f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$ 

$$f'(\frac{1}{2}) = 4e^{-1}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{2}{e} \text{ و } f(\frac{1}{2}) = 0$$

منه المعادلة هي :  $y = \frac{2}{e}(x - \frac{1}{2})$  أي  $y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e}$  (T)

$$g(x) = f(x) - (\frac{2}{e}x - \frac{1}{e})$$

4 -

$$g'(x) = f'(x) - \frac{2}{e}$$

منه :

$$g''(x) = f''(x) = 4e^{-2x}(2x-3)$$

منه :

5 - إشارة  $g''(x)$  هي إشارة  $(2x-3)$  لأن  $4e^{-2x} > 0$  كمايلي :

x	$-\infty$	3/2	$+\infty$
2x-3		-	+

منه :

x	$-\infty$	3/2	$+\infty$
g''(x)		-	+

إذن :  $g'$  متناقصة على المجال  $]-\infty; 3/2[$  $g'$  متزايدة على المجال  $]3/2; +\infty[$

$g'$  نصل قيمة حدة صغرى على  $\mathbb{R}$  عند  $x = 3/2$  و قيمتها :

$$g'\left(\frac{3}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{2}{e} = 4e^{-3}\left(1 - \frac{3}{2}\right) - \frac{2}{e} = -2e^{-3} - 2e^{-1} = -2(e^{-3} + e^{-1})$$

منه جدول تغيرات الدالة  $g'$  كمايلي :

$x$	$-\infty$	$\alpha_1$	$3/2$	$+\infty$
$g''(x)$		-	0	+
$g'(x)$	$+\infty$		$-2(e^{-3} + e^{-1})$	$-2/e$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) - \frac{2}{e} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 4e^{-2x}(1-x) - \frac{2}{e} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4e^{-2x}(1-x) - \frac{2}{e} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4e^{-2x} + 2(-2xe^{-2x}) - \frac{2}{e}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2xe^{-2x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \text{ لأن } = -\frac{2}{e}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \text{ : منه } g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e} - \frac{2}{e} = 0 \text{ : إذن } f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e} \text{ لاحظ أن}$$

6 - إذن : حسب جدول تغيرات الدالة  $g'$  نستنتج إشارة  $g'(x)$  على  $\mathbb{R}$  كمايلي :

$x$	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

منه جدول تغيرات الدالة  $g$  كمايلي :

$x$	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^{-2x} - \frac{2}{e}x - \frac{1}{e} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x}\left(2x-1 - \frac{2}{e}xe^{2x} - \frac{1}{e}e^{2x}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x}(2x-1) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{e}x + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\frac{2}{e} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right] = 0 = 0 = 0$$

7- من جدول تغيرات الدالة  $g$  نستنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$  كمايلي :

$x$	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	-

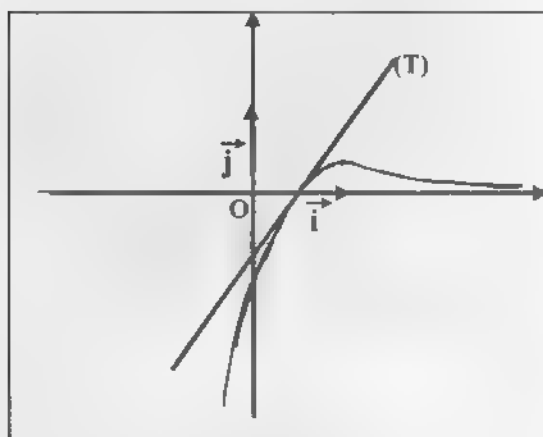
$$g(x) = f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right) \quad \text{لدينا :}$$

$$g(x) \text{ منه : إشارة } f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right) \text{ هي إشارة } g(x)$$

إذن : لما  $x = 1/2$  المنحنى (C) يقطع المماس (T)

لما  $x \in \mathbb{R} - \{1/2\}$  المنحنى (C) يقع تحت المماس (T)

8- الإنشاء :



التمرين 17

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$   $\rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$  و (C) منحنىها في معلم متعامد و متجانس

1- أدرس شلعية الدالة  $f$  ثم فسر النتيجة هندسيا .

2- بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب  $x$  فإن  $e^{-x} \leq e^x$

3- عين نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$

4- أدرس تغيرات الدالة  $f$  على  $[0; +\infty[$

5- نعتبر الدالتين  $g$  و  $h$  المعرفتان على  $\mathbb{R}$   $\rightarrow g(x) = \frac{1}{e^x}$  و  $h(x) = \frac{1}{2e^x}$

بين أن من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$   $h(x) \leq f(x) < g(x)$

6- أنشئ المنحنى (C)

الحل 17

1- ليكن  $x \in \mathbb{R}$  إذن  $(-x) \in \mathbb{R}$  و  $f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{(-x)}} = \frac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x)$  منه : الدالة  $f$  زوجية .

إذن : المنحنى (C) يقبل محور التناظر كمحور تناظر .

2- لدينا  $x \geq 0$  إذن :  $-x \leq 0$

منه :  $-x \leq x$

منه :  $e^{-x} \leq e^x$  لأن الدالة  $\exp$  متزايدة .

3-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

4- التغيرات :  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

إذن : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $-(e^x - e^{-x})$  لأن المقام موجب (على المجال  $[0; +\infty[$ )  
 لكن حسب السؤال (2) : من أجل  $x \geq 0$  فإن  $e^x \geq e^{-x}$  منه  $e^x - e^{-x} \geq 0$  أي  $-(e^x - e^{-x}) \leq 0$   
 إذن : إشارة  $-(e^x - e^{-x})$  كماليلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-(e^x - e^{-x})$	بالقناظر	+	-

	منه جدول تغيرات الدالة f على IR كماليلي :		
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0

$$f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} - \frac{1}{e^x} \quad : x \in [0; +\infty[ \text{ ليكن } 5 -$$

$$= \frac{e^x - e^x - e^{-x}}{e^x(e^x + e^{-x})} = -\frac{e^{-x}}{e^x(e^x + e^{-x})} < 0$$

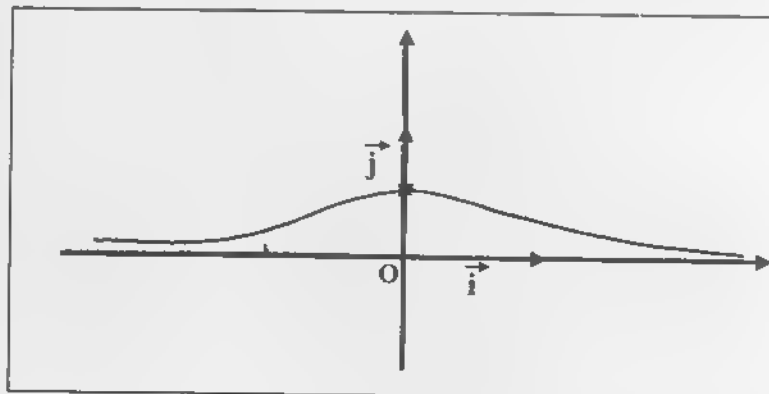
إذن :  $f(x) - g(x) < 0$  منه  $f(x) < g(x)$

$$f(x) - h(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} - \frac{1}{2e^x} = \frac{2e^x - e^x - e^{-x}}{2e^x(e^x + e^{-x})}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x(e^x + e^{-x})} \geq 0 \quad \text{حسب السؤال (2) (على المجال } [0; +\infty[)$$

إذن :  $f(x) - h(x) \geq 0$  منه  $f(x) \geq h(x)$

نتيجة : من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  :  $h(x) \leq f(x) < g(x)$   
 6 - الإنشاء :



### التمرين - 18

الجزء I

u دالة معرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $u(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln |x|$

1 - أدرس تغيرات الدالة u على  $\mathbb{R}^*$

2 - بين أن المعادلة  $u(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]1/2; 1[$

3 - استنتج إشارة  $u(x)$  على  $\mathbb{R}^*$

الجزء II

f دالة معرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $f(x) = 2x - \frac{\ln |x|}{x^2}$  نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 - أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ؛  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (تقبل أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ )

$$\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = 0 \right)$$

2 - أدرس تغيرات الدالة  $f$

$$f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2} \quad \text{بين أن}$$

4 - باستعمال حصر  $\alpha$  في السؤال (2) أثبت أن  $-0,5 < f(\alpha) < 2,5$

الجزء III

لتكن  $M(x; y)$  و  $M'(x'; y')$  نقطتين من المستوي حيث  $M'$  هي نظيرة  $M$  بالنسبة إلى محور الترتيب  
1 - عين  $x'$  و  $y'$  بدلالة  $x$  و  $y$

2 - بين أن إذا كانت  $M$  تتغير على المنحنى (C) فإن النقطة  $M'$  تتغير على المنحنى

$$y = -2x - \frac{\ln|x|}{x^2} \quad \text{الذي معادلته}$$

3 - أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و ( $\gamma$ )

الحل - 18

الجزء I

1 - تغيرات الدالة  $u : u$  معرفة على  $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 1 + 2 \ln|x|) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[ 2x^2 - \frac{1}{x} + 2 \frac{\ln|x|}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x [2x^2 - 0 + 0] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لأن } = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (0 - 1 + 2 \ln|x|)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = -\infty \quad \text{لأن } = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 1 + 2 \ln|x|) = +\infty$$

الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^*$  و دالتها المشتقة :

$$u'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x} = \frac{6x^3 + 2}{x} = \frac{2(3x^3 + 1)}{x}$$

منه إشارة  $u'(x)$  :

$x$	$-\infty$	$(-\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$	$0$	$+\infty$
$3x^3 + 1$	-	0	+	
$x$	-	-	0	+
$2(3x^3 + 1)$	+	0	-	+
$-x$				

منه جدول تغيرات الدالة  $u$  :

$x$	$-\infty$	$(-\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$	$0$	$+\infty$
$u'(x)$	+	0	-	+
$u(x)$	$-\infty$	$u\left((-\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}\right)$	$-\infty$	$+\infty$

$$u\left(-\frac{1}{3}\right)^{1/3} - 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 1 + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\ln 3 = -\frac{1}{3}(5 + 2\ln 3) < 0$$

2- من جدول تغيرات الدالة  $u$  نستنتج أن الدالة  $u$  تتعدم مرة واحدة على المجال  $]0; +\infty[$  و عليه فالمعادلة  $u(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\alpha \in ]0; +\infty[$  حيث

$$u(1) = 2 - 1 + 2\ln 1 = 1 > 0 \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{8} - 1 + 2\ln \frac{1}{2} = -\frac{6}{8} - 2\ln 2 < 0$$

إذن :  $\left. \begin{array}{l} u \text{ مستمرة على المجال } [1/2; 1] \\ u(1/2) \times u(1) < 0 \end{array} \right\}$

منه : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فالمعادلة  $u(x) = 0$  تقبل حلا  $\alpha$  على المجال  $]1/2; 1[$

بما أن  $u$  متزايدة تماما على  $]1/2; 1[$  فإن  $\alpha$  وحيد .

3- بملاحظة جدول تغيرات الدالة  $u$  نستنتج إشارة  $u(x)$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	0	1/2	$\alpha$	1	$+\infty$
$u(x)$	-	-	-	0	+	+

الجزء II

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x|}{x^2} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - \frac{\ln|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\ln|x| = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 - \frac{\ln|x|}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x|}{x^2} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \frac{\ln|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

2- تغيرات الدالة  $f : f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^*$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{\frac{1}{x}(x^2) - 2x \ln|x|}{x^4} \\ &= \frac{2x^4 - (x - 2x \ln|x|)}{x^4} \\ &= \frac{2x^4 - x + 2x \ln|x|}{x^4} \\ &= \frac{x(2x^3 - 1 + 2\ln|x|)}{x^4} \\ &= \frac{x u(x)}{x^4} \end{aligned}$$

منه : إشارة  $f'(x)$  على  $\mathbb{R}^*$  هي إشارة  $x u(x)$  كمايلي :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$x$	-	+	+
$u(x)$	-	-	+
$f'(x)$	+	-	+

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3 - لدينا :  $u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 2\alpha - \frac{\ln|\alpha|}{\alpha^2}$  ..... (1) حيث  $u(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned} u(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow 2\alpha^3 - 1 + 2\ln|\alpha| = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\ln|\alpha| - 1 - 2\alpha^3 \\ &\Leftrightarrow \ln|\alpha| = \frac{1 - 2\alpha^3}{2} \end{aligned}$$

$$f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1 - 2\alpha^3}{2\alpha^2} \quad \text{بالتعويض في (1) :}$$

$$\begin{aligned} &= 2\alpha - \frac{1 - 2\alpha^3}{2\alpha^2} \\ &= 2\alpha - \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{2\alpha^3}{2\alpha^2} \end{aligned}$$

$$= 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2} \quad \text{و هو المطلوب}$$

4 - لدينا :  $1/2 < \alpha < 1$  إذن :  $3/2 < 3\alpha < 3$  ..... (1)

$$1/4 < \alpha^2 < 1$$

$$1/2 < 2\alpha^2 < 2$$

$$1/2 < \frac{1}{2\alpha^2} < 2 \quad \text{منه :}$$

$$(2) \dots\dots\dots -2 < \frac{-1}{2\alpha^2} < -\frac{1}{2} \quad \text{منه :}$$

$$\frac{3}{2} - 2 < 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2} < 3 - \frac{1}{2} \quad \text{بجمع المتباينتان (1) و (2) طرف - طرف نحصل على :}$$

$$\frac{-1}{2} < 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{5}{2} \quad \text{أي :}$$

$$-0,5 < f(\alpha) < 2,5 \quad \text{أي :}$$

### الجزء III

$$M'(x'; y') \notin M(x; y)$$

1 - تكون  $M'$  نظيرة  $M$  بالنسبة إلى محور الترتيب إذا و فقط إذا كان :  $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

2 -  $M$  تتغير على المنحنى (C) إذن :  $y = f(x)$

$$y = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2} \quad \text{أي :}$$

$$y' = y \Leftrightarrow y' = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2} \quad \text{منه :}$$

$$\Leftrightarrow y' = -2(-x) - \frac{\ln|-x|}{(-x)^2}$$

$$x' = -x \Leftrightarrow y' = -2x' - \frac{\ln|x'|}{(x')^2}$$

$$\text{منه : النقطة } M'(x'; y') \text{ تنتمي إلى منحنى الدالة } -2x - \frac{\ln|x|}{x^2} \text{ و هو المطلوب .}$$

3 - وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (γ) :

$$f(x) - \left(-2x - \frac{\ln|x|}{x^2}\right) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2} + 2x + \frac{\ln|x|}{x^2} = 4x$$

x	-∞	0	+∞
4x	-	0	+

منه :



لما  $x \in ]-\infty; 0[$  : المنحنى (C) تحت المنحنى  $(\gamma)$  .

لما  $x \in ]0; +\infty[$  : المنحنى (C) فوق المنحنى  $(\gamma)$  .

**التمرين - 19**

الجزء I : دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  و (C) منحناها في معتم متعامد و متجانس  $(O; \vec{I}; \vec{J})$

1 - أدرس شفعية الدالة  $f$  . فسر هندسيا النتيجة

2 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$

3 - ارسم المنحنى (C) على  $\mathbb{R}$

الجزء II : لتكن  $A(1; 0)$  نقطة من المستوي و  $M(x; y)$  نقطة من المنحنى (C)

1 - عين بدلالة  $x$  المسافة  $AM$

نعرف الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = (x-1)^2 + \frac{(e^x - e^{-x})}{4}$

2 - أحسب  $g'(x)$

3 - أحسب  $g''(x)$  حيث  $g''$  هي الدالة المشتقة الثانية للدالة  $g$  .

4 - بين أن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $g''(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 2$

5 - إستنتج تغيرات الدالة  $g'$  على  $\mathbb{R}$

6 - بين أن يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $[0; 1]$  يحقق  $g'(\alpha) = 0$

7 - تحقق أن  $0,46 < \alpha < 0,47$

8 - عين إشارة  $g'(x)$  على  $\mathbb{R}$

9 - أدرس تغيرات الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  (لا يطلب حساب النهايات)

10 - ما هي القيمة الحدية الصغرى للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$

نقبل أن المسافة  $AM$  تكون أصغر ما يمكن عند النقطة  $M_\alpha$  من المنحنى (C) و التي فاصلتها  $\alpha$  .

11 - مثل النقطة  $M_\alpha$  في الشكل .

12 - بين أن :  $\alpha - 1 = -\frac{1}{2} f(2\alpha)$  ثم  $g(\alpha) = \frac{1}{4} [f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2$

13 - إستنتج حصرا للعدد  $g(\alpha)$  ثم للمسافة  $AM_\alpha$

**الحل - 19**

الجزء I :

1 - من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $(-x) \in \mathbb{R}$  و  $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-( -x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{(e^x - e^{-x})}{2}$

أي :  $f(-x) = -f(x)$

منه :  $f$  دالة فردية

إذن : المبدأ  $O(0; 0)$  هو مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C)

2 - تغيرات الدالة  $f$  على  $]0; +\infty[$

$$f(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

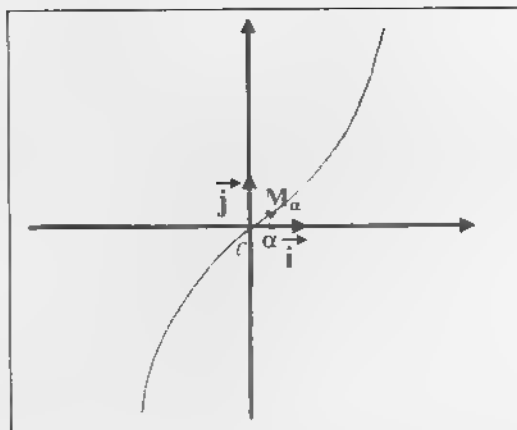
$$f'(x) = \frac{1}{2} [e^x - (-e^{-x})] = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

منه :  $f'(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

3 - الإنشاء :



الجزء II :

1 - لدينا  $A(1; 0)$

و  $M(x; y)$

لكن  $M \in (C)$  إذن :  $y = f(x)$  أي  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

منه :  $M(x; \frac{e^x - e^{-x}}{2})$

إذن الشعاع  $\overrightarrow{AM}$  له المركبات :  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{pmatrix}$

منه :  $AM = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}$

أي :  $AM = \sqrt{(x-1)^2 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}}$  وهي المسافة المطلوبة .

$$g(x) = (x-1)^2 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \quad -2$$

إذن :  $g'(x) = 2(x-1) + \frac{1}{4} [2(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})]$

$$= 2x - 2 + \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x})$$

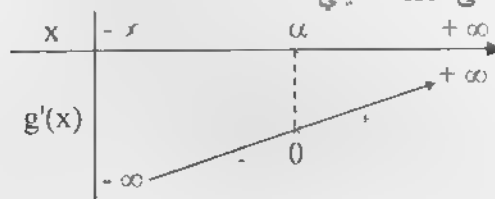
$$= 2x - 2 + \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$g''(x) = 2 + \frac{1}{2} (2e^{2x}) - \frac{1}{2} (-2e^{-2x}) \quad -3$$

4 - أي :  $g''(x) = 2 + e^{2x} + e^{-2x}$  وهو المطلوب .

5 - لدينا :  $g''(x) = 2 + e^{2x} + e^{-2x}$  إذن :  $g''(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$

منه : الدالة  $g'$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$  كمايلي :



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 + \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 + \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 + \frac{1}{2} e^{2x}$$

6 - من جدول تغيرات الدالة  $g'$  نستنتج أن المعادلة  $g'(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا على  $\mathbb{R}$  ومن جهة أخرى لدينا :

$$g'(0) = 0 - 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

$$g'(1) = 2 - 2 + \frac{1}{2} e^1 - \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})$$

نتيجة :  $\left. \begin{array}{l} g' \text{ مستمرة على } [0; 1] \\ g'(0) \times g'(1) < 0 \end{array} \right\}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد  $\alpha \in [0; 1]$  حيث  $g'(\alpha) = 0$

7 - لنتحقق أن  $0.46 < \alpha < 0.47$

$$g'(0.46) = 2(0.46) - 2 + \frac{1}{2} e^{2(0.46)} - \frac{1}{2} e^{-2(0.46)} = -0.02$$

$$g'(0.47) = 2(0.47) - 2 + \frac{1}{2} e^{2(0.47)} - \frac{1}{2} e^{-2(0.47)} = 0.01$$

نتيجة :  $\left. \begin{array}{l} g' \text{ مستمرة على } [0.46; 0.47] \\ g'(0.46) \times g'(0.47) < 0 \end{array} \right\}$  إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد  $\beta \in [0.46; 0.47]$  حيث  $g'(\beta) = 0$

بما أن  $\alpha$  وحيد فإن  $\beta = \alpha$  و هو المطلوب

8 - بملاحظة جدول تغيرات الدالة  $g'$  نستنتج إشارة  $g'(x)$  كمايلي :

x	$-\infty$	0.46	$\alpha$	0.47	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	

9 - حسب جدول إشارة  $g'(x)$  فإن :  $\left. \begin{array}{l} g : \text{متناقصة على المجال } ]-\infty; \alpha[ \\ g : \text{متزايدة على المجال } ]\alpha; +\infty[ \end{array} \right\}$

منه جدول تغيرات الدالة  $g$  كمايلي :

x	$-\infty$	0.46	$\alpha$	0.47	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$			$g(\alpha)$		

10 - من جدول تغيرات الدالة  $g$  فإن القيمة الحدية الصغرى للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  هي  $g(\alpha)$

11 - أنظر الرسم لتمثيل النقطة  $M_\alpha$

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 2 + \frac{1}{2} e^{2\alpha} - \frac{1}{2} e^{-2\alpha} = 0 \quad -12$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha - 2 = -\frac{1}{2} e^{2\alpha} + \frac{1}{2} e^{-2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha - 1) = -\frac{1}{2} (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 = -\frac{1}{4} (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 = -\frac{1}{2} f(2\alpha) \quad \text{و هو المطلوب}$$

$$g(\alpha) = (\alpha - 1)^2 + \frac{1}{4} (e^\alpha - e^{-\alpha})^2$$

منه جهة أخرى :

$$g(\alpha) = \left[ -\frac{1}{2} f(2\alpha) \right]^2 + \left( \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \right)^2 \quad \text{أي :}$$

$$g(\alpha) = \frac{1}{4} [f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2 \quad \text{أي : وهو المطلوب}$$

13 - الحصر :  $0,46 < \alpha < 0,47$  إذن :  $f(0,46) < f(\alpha) < f(0,47)$  لأن  $f$  متزايدة على  $[0,46 ; 0,47]$

$$0,47 < f(\alpha) < 0,48 \quad \text{أي :}$$

$$(1) \dots\dots\dots 0,22 < [f(\alpha)]^2 < 0,23 \quad \text{أي :}$$

$$0,92 < 2\alpha < 0,94 \quad \text{منه : } 0,46 < \alpha < 0,47$$

$$f(0,92) < f(2\alpha) < f(0,94) \quad \text{منه :}$$

$$1,05 < f(2\alpha) < 1,08 \quad \text{أي :}$$

$$(1,05)^2 < [f(2\alpha)]^2 < (1,08)^2 \quad \text{منه :}$$

$$1,10 < [f(2\alpha)]^2 < 1,16 \quad \text{أي :}$$

$$(2) \dots\dots\dots 0,27 < \frac{1}{4} [f(2\alpha)]^2 < 0,29 \quad \text{منه :}$$

$$0,22 + 0,27 < \frac{1}{4} [f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2 < 0,29 + 0,23 \quad \text{بجمع (1) و (2) نحصل على :}$$

$$0,49 < g(\alpha) < 0,52 \quad \text{أي :}$$

$$AM_\alpha = \sqrt{g(\alpha)} \quad \text{فإن } AM = \sqrt{g(x)} \quad \text{بما أن}$$

$$0,7 < AM_\alpha < 0,72 \quad \text{أي } \sqrt{0,49} < AM_\alpha < \sqrt{0,52}$$

(هذه المسافة مقدرة بوحدة قياس أشعة توجيه المعلم)

## التمرين - 20

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $]0 ; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$  الجزء I :

1 أدرس تغيرات الدالة  $g$  المعرفة على  $]1 ; +\infty[$  بـ :  $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$

2 - بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا واحدا  $\alpha$  من المجال  $[e+1 ; e^3+1]$

ثم إستنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]1 ; +\infty[$

لتكن  $\phi$  الدالة المعرفة على  $]1 ; +\infty[$  بـ  $\phi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$

3 - بين أن إشارة  $\phi'(x)$  هي إشارة  $g(x^2)$  على المجال  $]1 ; +\infty[$

4 - بين أن  $\phi$  متزايدة على المجال  $]1 ; \sqrt{\alpha}]$  و متناقصة على المجال  $[\sqrt{\alpha} ; +\infty[$

الجزء III :

1 - تحقق أن من أجل كل  $x$  من المجال  $]0 ; +\infty[$  :  $f(x) = \phi(e^x)$

2 - إستنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0 ; +\infty[$

4 - أثبت أن  $f$  تقبل قيمة حدية عظمى عند  $\ln(\sqrt{\alpha})$

5 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0 ; +\infty[$  :  $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

6 - أنشئ المنحنى (C) الممثل للدالة  $f$

## الحل - 20

الجزء I :

1 - تغيرات الدالة  $g$  حيث  $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$

$g$  معرفة على  $]1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - (x-1)\ln(x-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = \lim_{y \rightarrow 0} y \quad \text{لأن } y = x-1 \quad \lim_{y \rightarrow 0} 2 - y \ln y$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y \ln y - 0 \text{ لأن } = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - (x-1) \ln(x-1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left[ \frac{2x}{x-1} - \ln(x-1) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2 \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)[2 - \ln(x-1)]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x-1) = -\infty \text{ لأن } = -\infty$$

f قابلة للاشتقاق على  $1; +\infty$  ودالتها المشتقة :

$$g'(x) = 2 - \left[ \ln(x-1) + \frac{1}{x-1}(x-1) \right]$$

$$= 2 - [\ln(x-1) + 1]$$

$$= 1 - \ln(x-1)$$

إشارة  $g'(x)$  :

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1) \leq \ln e$$

$$\Leftrightarrow x-1 \leq e$$

$$\Leftrightarrow x \leq e+1$$

منه إشارة  $g'(x)$  كما يلي :

x	1	1+e	
$g'(x)$		+	-

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	1	1+e	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	2	$2+e$	$-\infty$

$$g(1+e) = 2(1+e) - e \ln(1+e-1) = 2+2e-e = 2+e$$

2- من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن الدالة g تتعدم مرة واحدة فقط .

أي المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  .

$$g(1+e) = 2+e > 0$$

$$g(1+e^3) = 2(1+e^3) - (1+e^3-1) \ln(1+e^3-1) = 2+2e^3 - e^3 \ln e^3 = 2-e^3 < 0$$

نتيجة :  $\left. \begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [1+e; 1+e^3] \\ g(1+e)g(1+e^3) < 0 \end{array} \right\}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا  $\alpha$  من المجال  $[1+e; 1+e^3]$  و هو المطلوب

منه إشارة  $g(x)$  كما يلي :

x	1	1+e	$\alpha$	1+e <sup>3</sup>	$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	

$$\phi'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2-1} \times x - \ln(x^2-1)}{x^2}$$

3- لدينا :

$$= \frac{2x^2 - (x^2-1) \ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$$

$$= \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$$

لاحظ أن على المجال  $]1; +\infty[$  لدينا :  $x^2 - 1 > 0$  إذن  $x^2(x^2 - 1) > 0$   
منه : إشارة  $\phi'(x)$  هي إشارة  $g(x^2)$  كمايلي :

لما  $1 < x^2 < \alpha$  أي  $1 < x < \sqrt{\alpha}$  فإن  $g(x^2) > 0$  أي  $\phi'(x) > 0$

لما  $x^2 > \alpha$  أي  $x > \sqrt{\alpha}$  فإن  $g(x^2) < 0$  أي  $\phi'(x) < 0$

نتيجة :  $\phi$  متزايدة على المجال  $]1; \sqrt{\alpha}[$

$\phi$  متناقصة على المجال  $]\sqrt{\alpha}; +\infty[$

$\phi$  تقبل قيمة حدية عظمى عند  $x^2 = \alpha$  أي  $x = \sqrt{\alpha}$

لأن  $\phi'(\sqrt{\alpha}) = 0$  و قيمتها :  $\phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$

الجزء II :

1 - من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $\phi(e^x) = \frac{\ln[(e^x)^2 - 1]}{e^x} = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$   
منه :  $f(x) = \phi(e^x)$  و هو المطلوب .

2 - لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^2 - 1) = -\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 1} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = -\infty$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \phi(e^x) = \lim_{x \rightarrow 1} \phi(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1) + \ln(x-1)}{x}$

لكن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} \times \frac{x-1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{x} = 1$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} \times 1 = 0$

و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}$   
 $= 0$

منه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{\ln(x-1)}{x}$   
 $= 0 + 0$   
 $= 0$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y^2 - 1)}{y} = 0$  (بوضع  $y = e^x$ )

3 - تغيرات الدالة  $f$  :

$f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

لدينا  $f(x) = \phi(e^x)$  إذن :  $f'(x) = e^x \phi'(e^x)$

$= e^x \left[ \frac{g[(e^x)^2]}{(e^x)^2 [(e^x)^2 - 1]} \right]$

$= \frac{e^x}{e^{2x}(e^{2x} - 1)} g(e^{2x})$

إذن : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $g(e^{2x})$  لأن  $\frac{e^x}{e^{2x}(e^{2x} - 1)} > 0$  على المجال  $]0; +\infty[$

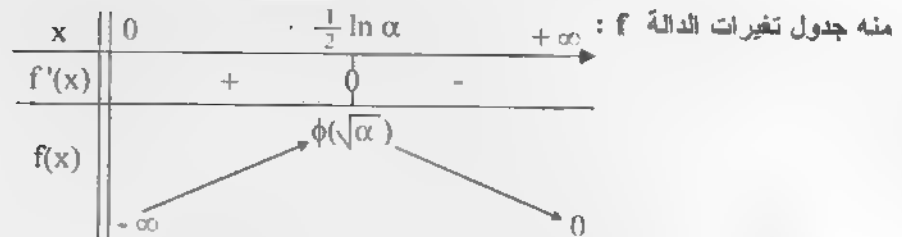
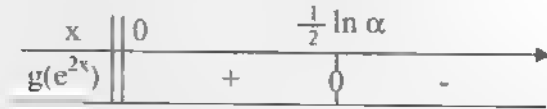
كمايلي :  $g(e^{2x}) \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \leq \alpha$

$$\Leftrightarrow e^{2x} < e^{\ln \alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq \ln \alpha$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \ln \alpha$$

منه :



$$f\left(\frac{1}{2} \ln \alpha\right) = \phi\left(e^{\frac{1}{2} \ln \alpha}\right) = \phi\left(e^{\ln \sqrt{\alpha}}\right) = \phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$$

4 - من جدول تغيرات الدالة  $f$  نستنتج ان  $f$  تقبل قيمة حدية عظمى عند  $x = \frac{1}{2} \ln \alpha = \ln(\alpha)^{1/2} = \ln \sqrt{\alpha}$

$$f(\ln \sqrt{\alpha}) = \phi(e^{\ln \sqrt{\alpha}})$$

و قيمتها

$$(\beta) \dots \dots \dots = \phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$$

لكن  $g(\alpha) = 0$

$$2\alpha - (\alpha - 1) \ln(\alpha - 1) = 0 \quad \text{أي :}$$

$$2\alpha = (\alpha - 1) \ln(\alpha - 1) \quad \text{منه :}$$

$$\ln(\alpha - 1) = \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \quad \text{أي :}$$

$$\phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \quad \text{إذن : بالرجوع إلى المساواة } (\beta) :$$

$$\phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\sqrt{\alpha} 2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha - 1)} \quad \text{أي :}$$

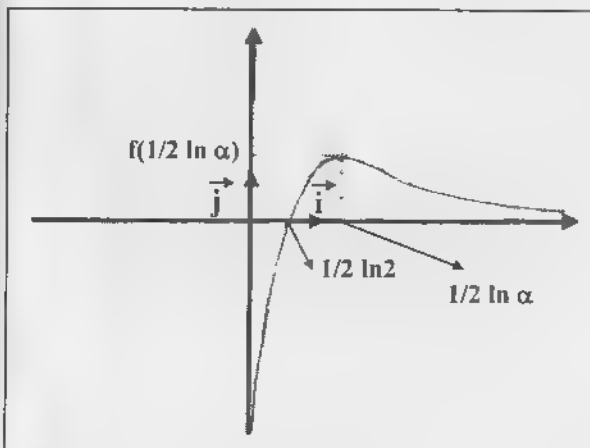
$$\phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1} \quad \text{أي :}$$

$$f(\ln \sqrt{\alpha}) = \phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1} \quad \text{نتيجة : القيمة الحدية العظمى للدالة } f \text{ هي}$$

$$\text{منه : من أجل كل } x \text{ من } ]0; +\infty[ : f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1} \text{ و هو المطلوب}$$

6 - الإثشاء :

لاحظ أن  $\phi(\sqrt{\alpha}) > 0$  و الدالة  $f$  تنعدم من أجل  $x = \frac{1}{2} \ln 2$



## التمرين - 21

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $k$  نعرف الدالة  $f_k$  على المجال  $[0; +\infty[$  كمايلي :

$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$  و نرمز بـ  $(C_k)$  إلى منحناها في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $[0; +\infty[$  بـ  $g(x) = \ln(x+1) - x$

1 - أدرس تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[0; +\infty[$

2 - إستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي موجب  $a$  : فإن  $\ln(a+1) \leq a$

3 - أحسب  $f_1'(x)$  ثم إستنتج تغيرات الدالة  $f_1$

4 - بين أن من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  :  $f_1(x) = \ln(1 + \frac{x}{e^x})$

5 - أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$  علما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

6 - أحسب  $f_k'(x)$  ثم إستنتج تغيرات الدالة  $f_k$

7 - بين أن من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  :  $f_k(x) = \ln(1 + k \frac{x}{e^x})$

8 - إستنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f_k$

9 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  :  $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$

10 - أكتب معادلة مماس المنحنى  $(C_k)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 وليكن  $(T_k)$  هذا المماس .

11 - ليكن  $p$  و  $m$  عدنان حقيقيان موجبان تماما حيث  $p < m$

أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين  $(C_m)$  و  $(C_p)$

12 - أنشئ  $(C_1)$  و  $(T_1)$  ثم  $(C_2)$  و  $(T_2)$

## الحل - 21

1 - تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[0; +\infty[$  :

$$g(0) = \ln(0+1) - 0 = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - x$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \end{aligned} \right\} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[ \frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) [0 - 1]$$

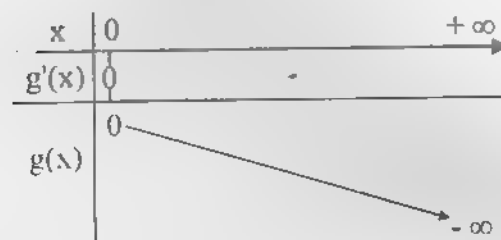
$$= -\infty$$

$g$  قابلة للاشتقاق على  $[0; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1-x-1}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  فإن  $g'(x) \leq 0$  لأن  $\frac{-x}{x+1} \leq 0$

منه جدول تغيرات الدالة  $g$  :



2 - من جدول تغيرات الدالة  $g$  نستنتج أن من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  : فإن

$$g(x) \leq 0 \quad \text{أي} \quad \ln(x+1) - x \leq 0 \quad \text{منه} \quad \ln(x+1) \leq x$$

نتيجة : من أجل كل  $a$  من المجال  $[0; +\infty[$  :  $\ln(a+1) \leq a$

3 - لدينا :  $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

$$f_1'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x} - 1 \quad \text{منه :}$$



$$f_1'(x) = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + x} \quad \text{أي :}$$

$$f_1'(x) = \frac{1 - x}{e^x + x} \quad \text{أي :}$$

منه : إشارة  $f_1'(x)$  على المجال  $[0; +\infty[$  هي إشارة  $1 - x$  لأن  $e^x + x > 0$  كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
1 - x	+	0	-

منه : جدول تغيرات الدالة  $f_1$  على المجال  $[0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	0	$\ln(e+1) - 1$	0

$$f_1(0) = \ln(e^0 + 0) - 0 = \ln(1) = 0$$

$$f_1(1) = \ln(e+1) - 1$$

ملاحظة : نهاية الدالة  $f_1$  عند  $+\infty$  تحسب في السؤال 5 .

4 - من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  لدينا :

$$f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$$

$$= \ln \left[ e^x \left( 1 + \frac{x}{e^x} \right) \right] - x$$

$$= \ln(e^x) + \ln \left( 1 + \frac{x}{e^x} \right) - x$$

$$= x + \ln \left( 1 + \frac{x}{e^x} \right) - x$$

$$= \ln \left( 1 + \frac{x}{e^x} \right) \quad \text{و هو المطلوب :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{x}{e^x} \right) \quad - 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$$

$$= 0 \quad (\text{يوضع في جدول التغيرات})$$

$$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$$

6 - لدينا :

$$f_k'(x) = \frac{e^x + k}{e^x + kx} - 1$$

إذن :

$$= \frac{e^x + k - e^x - kx}{e^x + kx}$$

$$= \frac{k(1-x)}{e^x + kx}$$

منه : إشارة  $f_k'(x)$  على  $[0; +\infty[$  هي إشارة  $1 - x$  فقط لأن  $k > 0$  و  $(e^x + kx) > 0$  كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
1 - x	+	0	-

منه : جدول تغيرات الدالة  $f_k$  على  $[0; +\infty[$  كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
$f_k'(x)$		0	
	+		-
$f_k(x)$	0	$\ln(e+k)-1$	0

$$f_k(0) = \ln(e^0 + k(0)) - 0 = \ln(1) = 0$$

$$f_k(1) = \ln(e^1 + k) - 1 = \ln(e+k) - 1$$

ملاحظة : نهاية الدالة  $f_k$  عند  $+\infty$  تحسب في السؤال 8

$$7 - \text{ من أجل كل } x \text{ من } [0 ; +\infty[ : f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$$

$$= \ln \left[ e^x \left( 1 + \frac{kx}{e^x} \right) \right] - x$$

$$= \ln(e^x) + \ln \left( 1 + \frac{kx}{e^x} \right) - x$$

$$= x + \ln \left( 1 + \frac{kx}{e^x} \right) - x$$

$$= \ln \left( 1 + \frac{kx}{e^x} \right) \text{ و هو المطلوب .}$$

$$8 - \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{kx}{e^x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} k = 0 \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1)$$

$$= 0 \text{ يوضع في جدول التغيرات}$$

9 - حسب جدول تغيرات الدالة  $f_k$  فإن الدالة  $f_k$  تقبل قيمة حدية عظمى على  $[0 ; +\infty[$  عند  $x=1$  و قيمتها :  $f_k(1) = \ln(e+k) - 1$

$$\text{أي : من أجل كل } x \text{ من } [0 ; +\infty[ : f_k(x) \leq \ln(e+k) - 1$$

$$\text{أي : } f_k(x) \leq \ln(e+k) - \ln(e)$$

$$\text{أي : } f_k(x) \leq \ln \left( \frac{e+k}{e} \right)$$

$$\text{أي : } f_k(x) \leq \ln \left( 1 + \frac{k}{e} \right)$$

$$\text{لكن حسب السؤال (2) فإن } \ln(a+1) \leq a \text{ أي } \ln \left( \frac{k}{e} + 1 \right) \leq \frac{k}{e}$$

$$\text{منه : } f_k(x) \leq \ln \left( 1 + \frac{k}{e} \right) \leq \frac{k}{e}$$

$$\text{أي : } f_k(x) \leq \frac{k}{e} \text{ و هو المطلوب .}$$

10 - معادلة المماس  $(T_k)$  للمنحنى  $(C_k)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 نكتب من الشكل :  $y = f_k'(0)x + f_k(0)$  حيث :

$$f_k'(0) = \frac{k(1-0)}{e^0 + k(0)} = k$$

$$f_k(0) = \ln(e^0 + 0) - 0 = \ln 1 = 0$$

منه : معادلة المماس  $(T_k)$  هي :  $y = kx$

11 - ليكن  $p > 0$  و  $m > 0$  حيث  $p < m$

$$f_m(x) - f_p(x) = \ln(e^x + mx) - x - [\ln(e^x + px) - x]$$

$$= \ln(e^x + mx) - \ln(e^x + px)$$

$$= \ln \left( \frac{e^x + mx}{e^x + px} \right)$$

لندرس إذن إشارة  $\ln\left(\frac{e^x + mx}{e^x + px}\right)$  على المجال  $]0; +\infty[$

لاحظ أن  $e^x > 0$  و  $p > 0$  و  $m > 0$  و  $x > 0$   
 إذن :  $e^x + px > 0$  و  $e^x + mx > 0$

$$\ln\left(\frac{e^x + mx}{e^x + px}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + mx}{e^x + px} \geq 1 \quad \text{منه :}$$

$$\Leftrightarrow e^x + mx \geq e^x + px$$

$$\Leftrightarrow mx \geq px$$

$$\Leftrightarrow mx - px \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m - p)x \geq 0$$

$$m - p > 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

x	0	$+\infty$
$f_m(x) - f_p(x)$	0	+

نتيجة : إذا كان  $m > p$  فإن :  $\left. \begin{array}{l} (C_m) \text{ و } (C_p) \text{ يتقاطعان في النقطة } (0; 0) \\ (C_m) \text{ يقع دائما فوق } (C_p) \text{ من أجل } x \in ]0; +\infty[ \end{array} \right\}$   
 12 - الإنشاء :

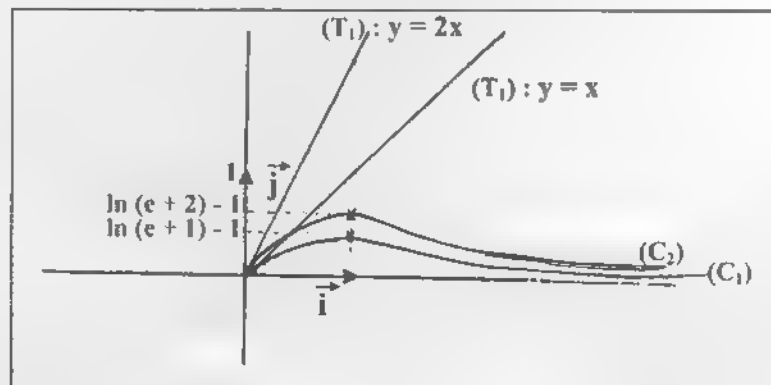
x	0	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	0	$\ln(e+1) - 1$	0

لنرسم جدول تغيرات  $f_1$  : (من أجل  $k=1$ )

x	0	1	$+\infty$
$f_2'(x)$	+	0	-
$f_2(x)$	0	$\ln(e+2) - 1$	0

لنرسم جدول تغيرات  $f_2$  : (من أجل  $k=2$ )

منه الإنشاء التالي :



التمرين - 22

$f$  دالة معرفة على المجال  $]-2; +\infty[$  بـ  $f(x) = 1 + x \ln(x+2)$  نسمي (C)

منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

الجزء I :

1 - أحسب  $f'(x)$  ثم  $f''(x)$  من أجل كل  $x$  من المجال  $]-2; +\infty[$

2 - استنتج جدول تغيرات الدالة  $f'$

3 - بين أن المعادلة  $f'(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  من المجال  $]-0,6; -0,5[$

4 - استنتج إشارة  $f'(x)$

5 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]-2; +\infty[$ 

الجزء II :

ليكن  $x_0$  عدد حقيقي من المجال  $]-2; +\infty[$  نسمي  $(T_0)$  مماس  $(C)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$  من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-2; +\infty[$  نضع :

$$d(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$$

1 - تحقق أن : من أجل كل  $x$  من المجال  $]-2; +\infty[$  :  $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ 2 - باستعمال تزايد الدالة  $f'$  أعط إشارة  $d'(x)$  ثم استنتج تغيرات الدالة  $d$  على المجال  $]-2; +\infty[$ 3 - أدرس الوضعية النسبية لـ  $(C)$  بالنسبة إلى  $(T_0)$ 

الجزء III :

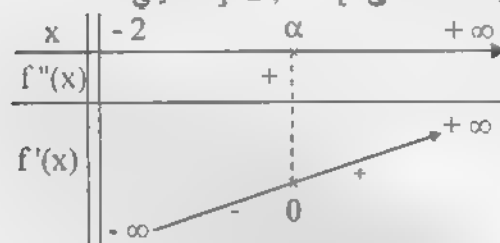
1 - عين معادلة المماس  $(T_0)$  من أجل  $x_0 = 0$ 2 - أوجد الأعداد الحقيقية  $x_0$  التي تكون من أجلها مماسات المنحنى  $(C)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$  تمر بمبدأ المعلم3 - أرسم المنحنى  $(C)$  [تأخذ  $\alpha = -0,54$  و  $f(\alpha) = 0,8$ ]

الحل - 22

الجزء I :

$$f'(x) = 1(\ln(x+2)) + \frac{x}{x+2} = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2} \quad -1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{x+2+2}{(x+2)^2} = \frac{x+4}{(x+2)^2}$$

2 - لاحظ أن :  $x > -2$  إذن :  $x+4 > 2$  و خاصة  $x+4 > 0$ منه :  $f''(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $]-2; +\infty[$ أي : الدالة  $f'$  متزايدة تماما على  $]-2; +\infty[$  كمايلي :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \ln(x+2) + \frac{-2}{x+2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{y \rightarrow 0} \ln y = -\infty \\ \lim_{y \rightarrow 0} -2/y = -\infty \end{array} \right\} \text{ لأن } = \lim_{y \rightarrow 0} \ln y - \frac{2}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) + \frac{x}{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2} = 1 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln(y) + 1$$

$$= +\infty$$

(نضع النهايات في جدول التغيرات)

3 - بملاحظة جدول تغيرات الدالة  $f'$  نستنتج أن  $f'$  مستمرة على  $]-2; +\infty[$  تأخذ قيم موجبة و سالبة  $f'$  متزايدة تماما .

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $]-2; +\infty[$  حيث  $f'(\alpha) = 0$ 

$$f'(-0,6) = \ln(1,4) - \frac{0,6}{1,4} = -0,09 \quad \text{و لدينا :}$$

$$f'(-0,5) = \ln(1,5) - \frac{0,5}{1,5} = 0,07$$

إذن :  $f'$  مستمرة على  $[-0,6 ; -0,5]$   
 $f'(-0,6) \times f'(-0,5) < 0$

منه : يوجد  $\alpha$  من المجال  $]-0,6 ; -0,5[$  (حسب مبرهنة القيم المتوسطة)  
 يحقق  $f'(\alpha) = 0$

4 - بملاحظة جدول تغيرات الدالة  $f'$  نستنتج ما يلي :

$x$	$-2$	$-0,6$	$\alpha$	$-0,5$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

5 - تغيرات الدالة  $f$  :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} 1 + x \ln(x+2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} 1 - 2 \ln(x+2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \ln(x+2) = -\infty \text{ لأن } = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x \ln(x+2)$$

$$= +\infty$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $]-2 ; +\infty[$  و  $f'(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$

و إشارة  $f'(x)$  حسب السؤال (4) كمايلي :

$x$	$-2$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  كمايلي :

$x$	$-2$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	
	$-$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$1 + \alpha \ln(\alpha + 2)$	$+\infty$

$$f(\alpha) = 1 + \alpha \ln(\alpha + 2)$$

الجزء II :

$$d(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)] \Rightarrow d(x) = f(x) - f'(x_0)x + \underbrace{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}_{\text{ثابت}} \quad -1$$

$$\Rightarrow d'(x) = f'(x) - f'(x_0) \text{ و هو المطلوب}$$

2 - بما أن الدالة  $f'$  متزايدة تماماً على  $]-2 ; +\infty[$  فإن يكون  $f'(x) - f'(x_0)$  موجب إذا و فقط إذا كان  $x \geq x_0$  منه جدول الإشارة التالي :

$x$	$-2$	$x_0$	$+\infty$
$d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$		-	0
			+

منه جدول تغيرات الدالة  $d$  كمايلي :

$x$	$-2$	$x_0$	$+\infty$
$d'(x)$		-	0

$d(x)$

$$d(x_0) = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 + f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0) = 0$$

إذن : الدالة  $d$  تقبل قيمة حدية صغرى على المجال  $]-2 ; +\infty[$  و قيمتها 0  $d(x_0)$

منه : من أجل كل  $x$  من  $]-2 ; x_0[ \cup ]x_0 ; +\infty[$  فإن  $d(x) > 0$

أي : المنحنى (C) يقع دائماً فوق المماس  $(T_0)$  من أجل  $x \in ]-2 ; x_0[ \cup ]x_0 ; +\infty[$  حيث المماس و المنحنى (C) يشتركان في هذه النقطة .

## الجزء III :

1 - من أجل  $x_0 = 0$  معادلة  $(T_0)$  هي :  $y = f'(0)x + f(0)$  حيث :  

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = \ln 2 \end{cases}$$

أي معادلة  $(T_0)$  :  $y = x \ln 2 + 1$

2 - معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$  نكتب من الشكل :

$$y = f'(x_0)[x - x_0] + f(x_0)$$

$$y = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \quad \text{أي}$$

اذن : يكون المماس يشمل المبدأ إذا و فقط إذا كان :  $-f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) = 0$

إذن نحل في  $]-2; +\infty[$  المعادلة  $f(x) - x f'(x) = 0$  كما يلي :

$$f(x) - x f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x \ln(x+2) - x \left[ \ln(x+2) + \frac{x}{x+2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + x \ln(x+2) - x \ln(x+2) - \frac{x^2}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{x+2} = 0$$

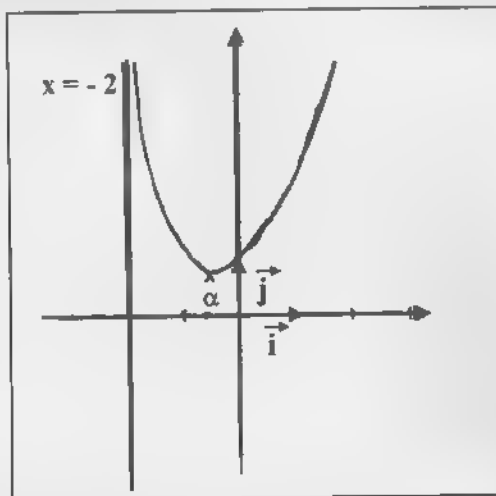
$$\Leftrightarrow \frac{x+2-x^2}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \quad \text{معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول } x :$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{-2} = 2 \end{cases}$$

نتيجة : يوجد مماسين للمنحنى (C) يشملان المبدأ أحدهما عند النقطة ذات الفاصلة 1 - و الآخر عند النقطة ذات الفاصلة 2 - الإنشاء :



من أجل  $\alpha = -0,54$  و  $f(\alpha) = 0,8$  نحصل على المنحنى (C) كما يلي :

## التمرين - 23

f و g دالتان معرفتان على  $[0; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \ln(1+x) - x$  و  $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$

1 - أدرس تغيرات كل من f و g على المجال  $[0; +\infty[$

2 - استنتج أن من أجل كل  $x \geq 0$  :  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

لتكن  $(u_n)_{n>0}$  متتالية معرفة بـ  $u_1 = \frac{3}{2}$  و  $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

3 - برهن بالتراجع أن  $u_n > 0$  من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$

4 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ T_n &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} \end{aligned} \right\} \text{صع :}$$

$$5 - \text{بين أن : } S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

$$6 - \text{أحسب } S_n \text{ و } T_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$$

7 - بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما .

8 - استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة و لتكن  $l$  نهايتها .

9 - نقبل أن إذا كانت  $(v_n)$  و  $(w_n)$  متتاليتان متقاربتان حيث  $v_n < w_n$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$

$$\text{فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$$

$$\text{بين إذن أن } 5/6 \leq \ln l \leq 1$$

الحل - 23

1 - تغيرات الدالة  $f$  على  $[0 ; +\infty[$

$$f(0) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) - x$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ لأن } \begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) \left[ \frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{x}{1+x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) (0-1) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $[0 ; +\infty[$  و دالتها المشقة :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{x+1} = \frac{-x}{1+x}$$

إذن : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $-x$  لأن  $(1+x) > 0$  على المجال  $[0 ; +\infty[$  أي :

$x$	0	$+\infty$
$-x$	0	-

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	0	$-\infty$

تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[0 ; +\infty[$

$$g(0) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) \left[ \frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{2(1+x)} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) \left[ -1 + \frac{x^2}{2x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) \left( -1 + \frac{1}{2} x \right)$$

$$= +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على  $[0; +\infty[$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + x \\ &= \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x} \\ &= \frac{x^2}{1+x} \end{aligned}$$

إذن :  $g'(x) \geq 0$  من أجل  $x \in [0; +\infty[$   
منه جدول تغيرات الدالة g كمايلي :

x	0	$+\infty$
g'(x)	0	+
g(x)	0	$+\infty$

2 - من جدول تغيرات الدالتين f و g نستنتج مايلي :

من أجل كل  $x \in [0; +\infty[$  :  $\left. \begin{array}{l} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{array} \right\}$

$$\left. \begin{array}{l} \ln(1+x) - x \leq 0 \\ \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \end{array} \right\} \text{ أي :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \ln(1+x) \leq x \\ \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \text{ أي :}$$

$$\text{أي : } x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \text{ و هو المطلوب :}$$

3 - البرهان بالتراجع أن : من أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n > 0$

من أجل  $n=1$  :  $u_1 = 3/2 > 0$  و  $3/2 > 0$  إذن : الخاصية محققة .

من أجل  $n=2$  :  $u_2 = u_1(1 + \frac{1}{2^2}) = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$  : الخاصية محققة .

نفرض أن  $u_n > 0$  من أجل  $n > 2$

هل  $u_{n+1} > 0$  ؟

لدينا :  $u_n > 0$

$$\left. \begin{array}{l} u_n > 0 \\ u_n(1 + \frac{1}{2^{n+1}}) > 0 \end{array} \right\} \text{ إذن : } (1 + \frac{1}{2^{n+1}}) > 0$$

$$u_{n+1} > 0 \text{ أي}$$

أي : الخاصية محققة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $u_n > 0$

4 - البرهان بالتراجع أن : من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :

$$\ln(u_n) = \ln(1 + \frac{1}{2}) + \ln(1 + \frac{1}{2^2}) + \dots + \ln(1 + \frac{1}{2^n})$$

من أجل  $n=1$  لدينا  $\ln(u_1) = \ln(\frac{3}{2}) = \ln(1 + \frac{1}{2})$  إذن : الخاصية صحيحة .

من أجل  $n=2$  لدينا  $\ln(u_2) = \ln(15/8)$

$$\ln(1 + \frac{1}{2}) + \ln(1 + \frac{1}{2^2}) = \ln(\frac{3}{2}) + \ln(\frac{5}{4}) = \ln(\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}) = \ln(\frac{15}{8}) \text{ و}$$

$$\ln(u_2) = \ln(1 + \frac{1}{2}) + \ln(1 + \frac{1}{2^2}) \text{ منه :}$$



إذن : الخاصية محققة من أجل  $n=2$

نعرض أن : من أجل  $n > 2$   $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

هل  $\ln(u_{n+1}) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

لدينا :  $\ln(u_{n+1}) = \ln\left[u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right]$

$$= \ln(u_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

إذن : الخاصية محققة من أجل  $(n+1)$

نتيجة : من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

5 — باستعمال الخاصية  $\ln(1+x) \leq x$  من أجل  $x \in \{1/2; 1/2^2; \dots; 1/2^n\}$  نحصل على المتباينات التالية :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \leq \frac{1}{2^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n} \quad \dots\dots\dots (n)$$

بجمع المتباينات (1) ، (2) ... (n) طرف لـ طرف نحصل على :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

أي :  $\ln(u_n) \leq S_n$  (α).....

باستعمال الخاصية  $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$  من أجل  $x \in \{1/2; 1/2^2; \dots; 1/2^n\}$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \geq \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (n)$$

بجمع المتباينات (1) ، (2) ... (n) طرف لـ طرف نحصل على :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) > \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2}\right)^2\right] + \dots + \left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2\right]$$

$$\ln(u_n) \geq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2\right] \quad \text{أي :}$$

$$\ln u_n \geq S_n - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \quad \text{أي :}$$

$$\ln u_n \geq S_n - \frac{1}{2} T_n \quad \text{أي : (β).....}$$

نتيجة : من المتباينتان (α) و (β) نستنتج أن :

$$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n \quad \text{و هو المطلوب}$$

6 -  $S_n$  هو مجموع  $n$  حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها  $1/2$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \left[ \frac{(1/2)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right] \quad \text{و حدها الأول 1/2 منه}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left( \frac{(1/2)^n - 1}{-1/2} \right) \quad \text{أي :}$$

$$S_n = 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \quad \text{أي :}$$

$T_n$  هو مجموع  $n$  حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها  $1/4$  و حدها الأول  $1/4$  منه :

$$T_n = \frac{1}{4} \times \left[ \frac{(1/4)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} \right]$$

$$T_n = \frac{1}{4} \left( \left( \frac{1}{4} \right)^n - 1 \right) \times \frac{-4}{3} \quad \text{أي :}$$

$$T_n = \frac{1}{3} \left[ 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right] \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left[ 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right] = \frac{1}{3}$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left( 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) - u_n \quad - 7$$

$$= u_n \left[ 1 + \frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right]$$

$$= u_n \left( \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n > 0 \text{ من أجل كل } n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{2^{n+1}} > 0 \end{array} \right\} \text{ بما أن}$$

فإن  $u_n \left( \frac{1}{2^{n+1}} \right)$  أي  $u_{n+1} - u_n > 0$  أي  $(u_n)$  متتالية متزايدة تماما .

$$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n \quad \text{8 - لدينا من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}^* :$$

$$e^{S_n - \frac{1}{2} T_n} \leq u_n \leq e^{S_n}$$

منه :

أي المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بـ  $e^{S_n}$

$(u_n)$  متزايدة تماما

نتيجة :  $(u_n)$  محدودة من الأعلى

إذن :  $(u_n)$  متتالية مقاربة :

$$9 - \text{لنكن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

لدينا :

$$e^{S_n - \frac{1}{2} T_n} \leq u_n \leq e^{S_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{S_n - \frac{1}{2} T_n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{S_n} \quad \text{منه :}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n &= 1/3 \end{aligned} \right\} \text{ لأن } e^{-1/2} \cdot \frac{1}{3} \leq \ell \leq e^1$$

أي :  
أي :  
منه :  $5/6 \leq \ln \ell \leq 1$  و هو المطلوب.

## التمرين - 24

- 1 - أدرس تغيرات الدالة  $g$  المعرفة على  $]-\infty; 1[$  بـ  $g(x) = (1-x)e^x - 1$
- 2 - استنتج إشارة  $g(x)$  من أجل  $x \in ]-\infty; 1[$
- 3 - بين أن : من أجل كل  $x$  من المجال  $]-\infty; 1[$  :  $e^x \leq \frac{1}{1-x}$

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $]-\infty; 1[$  بـ  $f(x) = e^x + \ln(1-x)$  نسمي  
(C) منحنىها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 4 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 1[$

5 أرسم المنحنى (C)

## الحل - 24

1 - معرفة على  $\mathbb{R}$  ر خاصة على  $]-\infty; 1[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x e^x - 1 = -1$$

لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)e^x - 1 = (1-1)e^1 - 1 = -1$$

$g$  قابلة للاشتقاق على  $]-\infty; 1[$  ودالتها المشتقة :

$$g'(x) = -1(e^x) + e^x(1-x) = -e^x + e^x - x e^x = -x e^x$$

منه إشارة  $g'(x)$  هي إشارة  $(-x)$  لأن  $e^x > 0$  كمايلي :

x	$-\infty$	0	1
-x	-	+	-

منه جدول تغيرات الدالة  $g$  :

x	$-\infty$	0	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-1	0	-1

قيم سالبة      قيم سالبة

$$g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

- 2 - من جدول تغيرات الدالة  $g$  نستنتج إشارة  $g(x)$  كمايلي :

x	$-\infty$	0	1
$g(x)$	-	0	-

- 3 - حسب جدول تغيرات الدالة  $g$  فإن من أجل كل  $x$  من المجال  $]-\infty; 1[$  :

$$(1-x)e^x - 1 \leq 0 \quad \text{أي} \quad g(x) \leq 0$$

$$(1-x)e^x \leq 1 \quad \text{منه}$$

$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad \text{منه} \quad \text{و هو المطلوب. (لأن } 1-x > 0 \text{)}$$

- 4 - تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 1[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + \ln(1-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^x + \ln(1-x)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} e^1 + \ln y$$

$$= -\infty$$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $]-\infty; 1[$  ودالتها المشتقة :

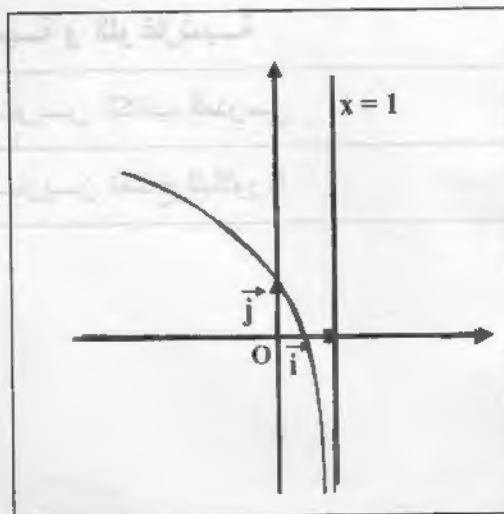
$$f'(x) = e^x + \frac{-1}{1-x} = \frac{(1-x)e^x - 1}{1-x} = \frac{g(x)}{1-x}$$

منه : إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]-\infty; 1[$  هي إشارة  $g(x)$  فقط لأن  $(1-x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$	1	$-\infty$

$$f(0) = e^0 + \ln(1-0) = 1$$



5 - الإنشاء :

المسئلة الخامسة

1813 61 5770 1 117

## الفهرس

الصفحة	المحور
1	المحور 1 : الإشتقاقية
8	حلول تمارين الكتاب المدرسي
53	حلول لتمرين نماذج للبكلوريا
97	المحور 2 : الدوال الأسية و اللوغارتمية
114	حلول تمارين الكتاب المدرسي
158	حلول لتمرين نماذج للبكلوريا

سلسلة هباج

TEL : 0773 26 52 81